Relación de ejercicios del tema 1

Topología II. Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática
Curso 2022/2023
Profesor: Rafael López Camino
Actualización: 06/10/2022, hora: 10:42:35

---

1. Si α es un arco y $\phi\colon \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ es una aplicación continua con $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$, probar que $\alpha \sim \alpha \circ \phi$.

2. En un conjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$, probar que todo lazo desde el centro de la estrella es homotópico al lazo constante en dicho punto. Deducir que dos arcos con los mismos puntos iniciales y finales en otros puntos son homotópicos.

3. Sea X un espacio arcoconexo, $x, y \in X$ y γ, σ dos arcos que unen y con x. Denotamos por $\phi_\gamma, \phi_\sigma\colon \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$ los homeomorfismos inducidos. Probar que $\phi_\gamma = \phi_\sigma$ si y sólo si $[\gamma * \sigma^{-1}] \in Z(\pi_1(Y, y))$.[1]

4. Probar que el cono de un espacio es arcoconexo.

5. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se consideran los lazos con punto base $x_0 = (1, 0)$ dados por $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ y $c_{x_0}(t) = x_0$. Probar que α no es homotópico a c_{x_0}.

6. Probar que los siguientes espacios son simplemente conexos:

   (a) Las letras T y H.

   (b) En $\mathbb{R}^n$, dos bolas sólidas conectadas por un segmento ($n \geq 2$).

   (c) Dos planos paralelos de $\mathbb{R}^3$ conectados por un segmento.

   (d) Dos esferas de $\mathbb{R}^3$ unidas por un segmento.

   (e) El cono $x^2 + y^2 = z^2$.

   (f) El paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

7. Encontrar, si es posible, dos conjuntos de $\mathbb{R}^n$ disjuntos y simplemente conexos que al unirlos por un segmento (éste sólo toca a cada conjunto en un único punto) no es un espacio simplemente conexo.

---

[1] Denotamos por $Z(G)$ al centro de un grupo G.

8. Describir los generadores del grupo fundamental del toro visto como superficie de revolución en $\mathbb{R}^3$.

9. Sea $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una aplicación continua. Entonces, fijado cualquier punto $x_0 \in \mathbb{S}^1$, $f_*\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos, en particular, $f_*(x) = mx$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Se llama *grado* de f al número entero m. Hallar el grado de las aplicaciones: rotación de 90 grados, simetría respecto del eje x, aplicación antípoda y de $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

10. Sea (X, d) un espacio métrico compacto, $x, y \in X$. En $\Omega_{x,y}$ se define

$$d'(\alpha, \beta) = \sup\{d(\alpha(t), \beta(t)) : t \in \mathbf{I}\}.$$

Probar que d' es una distancia en $\Omega_{x,y}$. Probar que $\alpha \sim \beta$ si y sólo si existe un arco en $(\Omega_{x,y}, d')$ que une α con β.

11. Sean X e Y espacios arcoconexos y $f\colon X \to Y$ una aplicación continua. Probar o dar contraejemplos:

   (a) Si f es inyectiva, también lo es f_*.

   (b) Si f es sobreyectiva, también lo es f_*.

   (c) Si f is biyectiva, también lo es f_*.

12. Sea $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con la topología cuyos cerrados son X o los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Probar que es una topología y que es arcoconexa. Probar también que es simplemente conexa.

13. Probar que si X es arcoconexo, la suspensión SX es simplemente conexa[2]. Para ello, sea $SX = X \times \mathbf{I}$ identificando $X \times \{0\}$ es un punto punto y $X \times \{1\}$ en otro. Tomamos $U = SX \setminus \{[(x, 0)]\}$ y $V = \{[(x, 1)]\}$ y probar que U y V son simplemente conexos (de manera parecida al cono) y que $U \cap V$ es arcoconexo porque es homeomorfo a $X \times (0, 1)$.

14. Sabemos que $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, en particular

$$([\alpha], 1) * (1, [\beta]) = ([\alpha], [\beta]) = (1, [\beta]) * ([\alpha], 1).$$

Hallar explícitamente una homotopía en $X \times Y$ que lleve $([\alpha], 1)$ en $(1, [\beta])$.

[2] Si X no es arcoconexa, el resultado no es cierto y dar un contraejemplo.

15. Supongamos que X no es necesariamente arcoconexo. Probar que si A es una componente arcoconexa y $a \in A$, entonces $\pi_1(A, a) \cong \pi_1(X, a)$.

16. Sabemos que $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^1$. Usando dicho homeomorfismo queremos relacionar $\pi_1(\mathbb{P}^1, [1])$ con $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. Si $\alpha \in \Omega_1$, denotamos por γ_α el correspondiente lazo por el homeomorfismo con punto base $[1]$. Probar que si $\alpha \in \Omega_1$, entonces $\deg(\alpha) = 2\deg(\gamma_\alpha)$. Hallar $\deg(\beta)$, donde $\beta(t) = [(\cos \pi t, \sin \pi t)]$, $t \in [0, 1/2]$.

Retracciones

1. Probar que la banda (cerrada) de Möbius $\mathbb{M}$ tiene como retracto de deformación a un conjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Hacer el ejercicio tanto viendo $\mathbb{M}$ como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (' cinta doblada') o como cociente de un cuadrado de $\mathbb{R}^2$. Como conclusión, su grupo fundamental es $\mathbb{Z}$. Plantear el mismo ejercicio con la banda abierta de Möbius.

2. Siguiendo con la banda (cerrada) de Möbius $\mathbb{M}$, probar que la curva borde de la misma (definir cuál es) es homeomorfa a una circunferencia y que no es un retracto de deformación de $\mathbb{M}$. Vista como lazo recorrido una vez ¿qué elemento es en el grupo fundamental de $\mathbb{M}$?

3. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y convexo, entonces A es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^n$. Para ello, definir para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $r(x) = a_x \in A$ el único punto de A tal que $d(x, A) = d(x, a_x)$.

4. Probar que $(0, 0)$ en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ no tiene ningún entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

5. Probar que si $0 < r < s$, entonces $\mathbb{D}_r$ es retracto de deformación de $\mathbb{B}_s$.

6. Probar que $\{(0, 0)\}$ es retracto de deformación de $\mathbb{S}^1_{(-1,0)} \cup \mathbb{S}^1_{(1,0)} \setminus \{(-2, 0), (2, 0)\}$.

7. Probar que los retractos y los retractos de deformación se preservan por homeomorfismos.

8. Probar que los retractos y los retractos deformación se preservan por transitividad en la inclusión de espacios.

9. Probar que los retractos y los retractos deformación se preservan por productos topológicos.

10. Sean A, B cerrados (o los dos abiertos) de un espacio X tal que $X = A \cup B$. Si $A \cap B$ es un retracto (resp. de deformación) de B, entonces A lo es de X.

11. Si A es un retracto de un espacio Hausdorff, probar que A es un cerrado.

12. Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ un compacto con una relación de equivalencia R e $I \subset \mathbb{R}^m$ otro conjunto compacto. Probar que

$$\left(\frac{Q}{R} \times \frac{I}{\text{"}=\text{"}}, \frac{\tau_u}{R} \times \tau_u\right) = \left(\frac{Q \times I}{R \times \text{"}=\text{"}}, \frac{\tau_u \times \tau_u}{R \times \text{"}=\text{"}}\right).$$

13. Probar que el cono CX es simplemente conexo. Para ello, probar que es contráctil en el punto $\{[(x,1)]\}$. En primer lugar hay que probar el siguiente resultado:

    Sea $f\colon X \to Y$ una identificación e I un espacio Hausdorff y localmente compacto[3]. Probar que

    $$f \times 1_I \colon X \times I \to Y \times I$$

    es una identificación.[4]

14. Probar que un plano proyectivo y una botella de Klein contiene una banda de Möbius.

15. Probar que un espacio (non necesariamente arcoconexo) contráctil es arcoconexo.

16. Se ha probado que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tiene como retracto de deformación a $\mathbb{S}^{n-1}$. Queremos 'extender' este resultado del siguiente modo.

    Consideramos la esfera $\mathbb{S}^2$, el toro, la botella de Klein y el plano proyectivo considerados como conjuntos cocientes del cuadrado $Q = \mathbf{I}^2$ (o del disco, dependiendo). Tomamos el punto $p = [(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$. Probar que cada uno de los espacios anteriores quitado el punto p tiene como retracto de deformación al borde de Q tomando cociente, es decir, $A = \frac{(\mathbf{I}\times\{0,1\})\cup(\{0,1\}\times\mathbf{I})}{\sim}$.

17. Sean $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Supongamos que $O_1 \subset X$ y $O_2 \subset Y$ son abiertos, $x_0 \in O_1$ y $y_0 \in O_2$. Si O_1 y O_2 son retractos de deformación de X e Y respectivamente, $O_1 \vee O_2$ lo es de $X \vee Y$.

18. La figura del ocho, $\mathbb{S}^1((-1,0)) \cup \mathbb{S}^1((1,0))$, es un retracto de deformación fuerte de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0), -1,0)\}$.

19. La figura ocho es un retracto por deformación fuerte del toro menos un punto.

[3] El espacio es localmente compacto si todo punto tiene una base de entornos compactos.

[4] El ejercicio anterior es un caso particular de éste (comprobar).

20. Consideramos el espacio peine

$$P = (\{0\} \times \mathbf{I}) \cup (K \times \mathbf{I}) \cup (\mathbf{I} \times \{0\}),$$

donde $K = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Probar que este conjunto es arcoconexo, no es localmente arcoconexo. Probar que $\{(0,0)\}$ es un retracto de deformación del espacio, pero no $\{(0,1)\}$ no lo es.

21. Probar que $\{(\frac{1}{2}, 0)\}$ es un retracto de deformación de $(\mathbb{S}^1 \times [0,1]) \cup (\mathbb{D}^2 \times \{0\})$.

22. Probar que $\mathbb{D}^2 \setminus (\{(\pm\frac{1}{2}, 0\})$ tiene como retracto de deformación la figura del ocho.

23. Probar que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(\pm 1, \pm 1)\}$ tiene como retracto de deformación una flor de 4 pétalos alrededor de los puntos eliminados.

24. Consideramos todos los espacios topológicos cocientes de $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ que han salido en clase identificando aristas. Sin usar que son homeomorfos a espacios 'conocidos', probar que son Hausdorff. Del mismo modo, probar que la retracción radial desde $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ prueba que las aristas (en el cociente) es un retracto de deformación del espacio punteado en $[(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$. Generalizar ambos ejercicios a espacios topológicos que son cocientes de polígonos cerrados (junto con su interior) identificando aristas entre sí.

25. Extendemos el concepto de arcos homotópicos. Dos aplicaciones $f, g \colon X \to Y$ se llaman *homotópicas*, y escribimos $f \sim g$, si existe $H \colon X \times I \to Y$ continua tal que $h(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. Si f es homotópica a una aplicación constante, se dice que f es *nulhomotópica*.

    (a) Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y $f \colon X \to Y$ es continua, entonces f es nulhomotópica. Lo mismo si $f \colon Y \to X$.

    (b) Si $f, g \colon X \to \mathbb{S}^n$ son continuas con $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$, entonces $f \sim g$.

    (c) Sea $f \colon X \to Y$ continua. Entonces f es nulhomotópica si y sólo si f admite una extensión continua al cono CX.

    (d) Dar un ejemplo dos aplicaciones nulhomotópicas que no son homotópicas entre sí.

    (e) Probar que ser homotópicas es una relación de equivalencia en el conjuntos de las aplicaciones continuas de X a Y.

    (f) Dos espacios X e Y se dicen que son *homotópicos* si existe $f \colon X \to Y$ y $g \colon Y \to X$ continuas tales que $g \circ f \sim 1_X$ y $f \circ g \sim 1_Y$. Probar que en tal caso, los grupos fundamentales de X e Y coinciden.

(g) Si A es un retracto de deformación de X, entonces A y X son homotópicos.

(h) Probar que la figura del 8 es homotópica a dos cuadrados (sólo las aristas) pegados por un lado común.

Teorema de Seifert-van Kampen

1. Hallar los grupos fundamentales de los siguiente espacios indicando los generadores:

   (a) $\mathbb{S}^2$ junto con el segmento $[N, S]$.

   (b) $\mathbb{S}^2$ juntos dos circunferencias disjuntas entre ellas de $\mathbb{R}^3$ tangentes a $\mathbb{S}^2$ en N y S respectivamente.

   (c) Unión de una esfera y un toro tangentes en un punto.

   (d) Unión de dos toros tangentes.

   (e) Un toro menos un punto, la botella de Klein menos un punto, el plano proyectivo menos un punto, la banda de Möbius menos un punto.

   (f) Un toro de revolución junto una esfera que es tangente a lo largo del círculo interior.

   (g) Un polígono regular de n lados identificando los lados de la siguiente forma:

      i. $n = 3$, aaa.

      ii. $n = 6$, $aa^{-1}ba^{-1}a^{-1}b^{-1}$.

      iii. $n = 6$, $ab^{-1}bccc$.

      iv. $n = 7$, $abaaab^{-1}a^{-1}$.

   (h) La suspensión de un espacio.

   (i) Una corona circular sólida, donde puntos antípodas de cada uno de los círculos (por separado) están relacionados entre sí.

   (j) Una corona circular sólida, donde puntos de cada uno de los círculos que están en la misma recta vectorial desde el centro están relacionados entre sí.

   (k) $(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) \cup (\mathbb{D}^2 \times \{0, 1\})$.

   (l) Cuatro circunferencias de radio 1 del plano, cuyos centros se encuentran en un cuadrado centrado en el origen con vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

   (m) Dos toros, uno de ellos es tangente al otro a lo largo de la circunferencia interior del mismo.

   (n) Un toro sólido.

(o) $\mathbb{S}^1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1(1,0) \cup [(-1,0),(1,0)]$.

(p) Tres circunferencias del plano tangentes exteriormente cada una con las otras dos.

(q) Lo mismo que antes pero cambiando circunferencias por esferas.

(r) Una circunferencia del plano junto con un triángulo inscrito en ella.

(s) Un triángulo del plano junto con un círculo inscrito en ella.

(t) $\mathbb{S}^2$ junto con un disco de radio 1 en su interior.

(u) $\mathbb{S}^2$ junto con dos discos de radio 1 en su interior y perpendiculares entre sí.

(v) Si $A = \{0,-1,1\}$, el conjunto del plano dado por $(A \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times A)$.

(w) $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$.

(x) El espacio $\mathbb{D}^2/\sim$, donde $x \sim y$ si son iguales o hay un giro de 120 grados que me lleva uno en otro.

(y) Tres esferas tangentes en un punto, una tras otra.

(z) Un triángulo en $\mathbb{R}^3$ junto tres esferas disjuntas dos a dos y que cada una toca uno sólo de los vértices del triángulo.

2. Damos la definición del grado de un lazo de $\mathbb{S}^1$ en otro punto distinto de 1. Sea $z_0 = e^{2\pi\theta_0} \in \mathbb{S}^1$. Tenemos dos posibilidades de definir el grado. En primer lugar, y siguiendo la analogía de cómo se definió para lazos con punto base 1, si $\beta \in \Omega_{z_0}$, definimos $\deg(\beta) = \tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta(0)}$, donde $\tilde{\beta}$ es el único levantamiento de β con $\tilde{\beta}(0) = \theta_0$. La otra posibilidad es usar el isomorfismo $\pi_1(\mathbb{S}^1,1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,z_0)$. Si γ es un arco que une 1 con z_0, definimos $\deg(\beta) = \deg \gamma * \beta * \gamma^{-1}$. Probar que ambas definiciones coinciden.

3. Hallar el grupo fundamental de:

(a) una camiseta y de una camisa desabrochada.

(b) Una taza de café con asa.

(c) Un volante de tres radios.