Relación de ejercicios del tema 0

Topología II. Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática
Curso 2022/2023
Profesor: Rafael López Camino
Actualización: 02/09/2022, hora: 09:30:20

Aquí $\mathbf{I} = [0, 1]$.

1. (Construcción de la banda de Möbius). En $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ se define la relación de equivalencia
$$(t, s) \sim (t', s') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (t, s) = (t', s'), & \text{o} \\ |t - t'| = 1, s = 1 - s', & \end{array} \right.$$
Se llama de Möbius al cociente $\mathbb{M} = \mathbf{I}^2/\sim$. Por otro lado definimos el siguiente subconjunto X de $\mathbb{R}^3$. Denotamos por R_θ el giro de ángulo θ respecto del eje z. Sea A el segmento de extremos $p = (2, 0, -1)$ y $q = (2, 0, 1)$ parametrizado como $A = \{(1 - t)p + tq : t \in \mathbf{I}\}$. Consideramos el segmento $R_\theta(A)$ dentro del plano vertical que contiene a $R_\theta(A)$ y el eje z. En este plano vectorial con centro el punto medio $\frac{p+q}{2}$, se hace girar un ángulo $\theta/2$ respecto de dicho punto y denotado por $f_{\theta/2}(R_\theta(A))$. Probar $X = \{f_{\theta/2}(R_\theta(A)) : \theta \in \mathbb{R}\}$ es homeomorfo a $\mathbb{M}$. Para establecer fácilmente el homeomorfismo, es mejor hacerlo al cociente $\mathbf{I} \times [0, 2\pi]/\sim$ donde aquí $\sim$ es la relación análoga definida en $\mathbb{M}$.

2. (Continuación) Probar que el subconjunto de $\mathbb{M}$ dado por $\mathbf{I} \times \frac{1}{2}/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

3. (Continuación) Consideramos el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ y la botella de Klein $\mathbb{K}$ como cocientes de $\mathbf{I}^2$ y las correspondientes relaciones de equivalencia. Probar que ambos espacios contienen banda de Möbius.

4. (Homeomorfismo entre el toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y el toro de revolución). Se considera C la circunferencia contenido en el plano $y = 0$ de radio 1 y centro $(2, 0, 1)$. Se llama toro de revolución al conjunto $X = \{R_\theta(C) : \theta \in \mathbb{R}\}$. Probar que $\mathbb{T} \cong X$. Hallar en X los subconjuntos correspondientes a $\mathbf{I} \times \{0\}/\sim$ y $\{0\} \times \mathbf{I}/\sim$.

5. Probar que la aplicación proyección $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ es abierta y no es cerrada.

6. Probar que la aplicación proyección $p\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ es abierta y cerrada.

7. Se considera la aplicación

$$f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Probar que f factoriza por la relación de equivalencia R_f estableciendo un enbebimiento de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^4$.

8. Probar que si X es un espacio métrico compacto y $f\colon X \to Y$ es una aplicación continua en un espacio métrico, entonces f es uniformemente continua:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x,x') < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

9. Probar la existencia del número de Lebesgue: si X es un espacio métrico compacto y $\{U_i : i \in I\}$ es un recubrimiento por abiertos de X, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$, la bola $B_\epsilon(x)$ está contenida en algún abierto del recubrimiento.

10. Probar que la topología a derechas y la estrictamente a derechas en $\mathbb{R}$ son arco-conexas.

11. Sea (X,τ) e (Y,τ') dos espacios topológicos y consideramos la unión disjunta de X e Y, denotada por $X \amalg Y$. Se llama topología suma en $X \amalg Y$ a la que tiene por base $\tau \cup \tau' = \{O, O' : O \in \tau, O' \in \tau'\}$.

    (a) Probar que, efectivamente, dicha familia forma una base para alguna topología, que denotaremos por $\tau \oplus \tau'$. Hallar la topología. ¿los cerrados de X (o de Y son cerrados en la topología suma? Si la respuesta fuera sí, ¿son así todos los cerrados?

    (b) Probar que las inclusiones naturales $I\colon X \hookrightarrow X \amalg Y$ y $j\colon Y \hookrightarrow X \amalg Y$ son continuas y que una aplicación $f\colon X \amalg Y \to Z$ es continua si y sólo si $f \circ i$ y $f \circ j$ son continuas.

    (c) Probar que $X \amalg X \cong X \times \{0,1\}$.

    (d) Estudiar si las inclusiones naturales de X e Y en $X \amalg Y$ y $X \vee Y$ son embebimientos.

    (e) Se fijan $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. En $X \amalg Y$ se define una relación de equivalencia identificando x_0 con y_0, $x_0 \sim y_0$. Al espacio cociente lo llamamos *topología wedge* y lo denotamos por $X \vee Y$:

    $$X \vee Y = \frac{X \amalg Y}{\sim}.$$

Se consider $X = Y = \mathbf{I}$, $x_0 = y_0 = 0$. Probar que $X \vee Y \cong \mathbf{I}$. En caso que $x_0 = y_0 = 1/2$, entonces $X \vee Y$ es homeomorfo a la letra X.

(f) Se considera la figura del 8 formada por dos circunferencias tangentes, por ejemplo, $Z = \mathbb{S}^1(p) \cup \mathbb{S}^1(q)$, $p = (-1, 0)$ y $q = (1, 0)$. Sea $X = Y = \mathbb{S}^1$. Probar que $X \vee Y \cong Z$. En particular, no depende de los puntos prefijados en X e Y. Generalizar a esferas de dimensión 2.

(g) Estudiar si las propiedades de conexión, arcoconexión y compacidad de X e Y se trasladan a $X \amalg Y$ y a $X \vee Y$.