Asignatura: Topología II
Curso 4^o, Doble grado en informática y matemáticas
Fecha: 29 de octubre de 2022
Actualización: 30/10/2022, hora: 11:45:49

Ejercicio 1. Hallar el grupo fundamental de

$$X = \mathbb{S}^1_2 \cup \mathbb{S}^1 \cup ([1,2] \times \{0\}).$$

Solución. Aplicamos el teorema de Seifert-Van Kampen tomando $O_1 = X - \{(-2,0)\}$ y $O_2 = X - \{(-1,0)\}$. Aquí $O_1 \cap O_2$ es arcoconexo. Después de probar que O_1 se retrae en $\mathbb{S}^1$ y que O_2 se retrae en $\mathbb{S}^1_2$, observamos que la interseccion es simplemente conexa porque se retrae en un punto. Por tanto $\pi_1(X) = \pi_1(O_1) * \pi_1(O_2) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Para hallar los generadores, tomamos como punto base el punto $p = (1,0)$. Entonces $\pi_1(O_1)$ está generado por el lazo $a = e^{2\pi it}$. Para $\pi_1(O_2)$, tomamos el arco $\gamma(t) = (t+1,0)$ que une p con $(2,0)$. El generador de $\pi_1(O_2,(2,0))$ es $t \mapsto 2e^{2\pi it}$. Por tanto $b = \gamma * 2e^{2\pi it} * \gamma^{-1}$. Definitivamente

$$\pi_1(X,p) = F[e^{2\pi it}, \gamma * 2e^{2\pi it} * \gamma^{-1}].$$