Asignatura: Topología II
Curso 4^o, Doble grado en informática y matemáticas
Fecha: 28 de octubre de 2022
Actualización: 30/10/2022, hora: 11:45:40

Ejercicio 1. En la banda de Möbius, $\mathbb{M} = \mathbf{I}^2/\sim$, se considera el lazo γ con punto base $p = (0, \frac{1}{2})$ definido como el que recorre hacia arriba desde p hasta $(0,1)$, luego el intervalo $\mathbf{I} \times \{1\}$, luego $\mathbf{I} \times \{0\}$ y finalmente desde $(1,0)$ hasta $(1, \frac{1}{2})$. Probar que $[\gamma] = 2[\alpha]$, donde $[\alpha] = 1$ es el generador de $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathbb{Z}$.

Solución. Estamos escribiendo los elementos de $\mathbb{M}$ como pares (x,y) de $\mathbf{I}^2$, donde se sobreentiende que estamos tomando clases de equivalencia. El lazo γ está bien definido pues $(1,1) \sim (0,0)$ y $(1, \frac{1}{2}) \sim (0, \frac{1}{2})$. Escribimos $\gamma = \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4$, donde

$$\begin{cases} \alpha_1 : t \to (0, t/2 + 1/2) \\ \alpha_2 : t \to (t, 1) \\ \alpha_3 : t \to (t, 0) \\ \alpha_4 : t \to (1, t/2) \end{cases}$$

Usamos que la retracción $r\colon \mathbb{M} \to \frac{\mathbf{I}}{\sim}$, $r(x,y) = (x, \frac{1}{2})$ determina un isomorfismo

$$r_*\colon \pi_1(\mathbb{M}) \to \pi_1(\frac{\mathbf{I}}{\sim}) = \mathbb{Z}.$$

Entonces

$$r_*([\gamma] = r_*([\alpha_1)] * r_*([\alpha_2)] * r_*([\alpha_3)] * r_*([\alpha_4)]$$

y

$$r_*([\alpha_1)] = [r(\alpha_1)] = [c_p],$$

$$r_*([\alpha_4)] = [r(\alpha_4)] = [c_p],$$

$$r_*([\alpha_2)] = [r(\alpha_2)] = [\alpha],$$

$$r_*([\alpha_3)] = [r(\alpha_3)] = [\alpha].$$

Por tanto,

$$r_*([\gamma]) = [c_p][\alpha][\alpha][c_p] = [\alpha]^2.$$