Asignatura: Topología II
Curso 4^o, Doble grado en informática y matemáticas
Fecha: 27 de octubre de 2022
Actualización: 30/10/2022, hora: 11:20:33

Denotamos la frontera de un conjunto con el símbolo ∂.

Ejercicio 1. Viendo el toro como $\mathbf{I}^2/\sim$, probar que $\partial(\mathbf{I}^2)/\sim$ es homeomorfo a la figura del ocho

Solución. La figura del ocho la consideramos como $8 = \mathbb{S}^1(-1,0) \cup \mathbb{S}^1(1,0)$. Entonces se define la aplicación $\partial \mathbf{I}^2 \to 8$ como

$$\begin{cases} (t,0) \to (1,0) + e^{2\pi i(t+\frac{1}{2})} = (1, \cos(2pit+\pi), \sin(2\pi t+\pi)) \\ (1,t) \to (-1,0) + e^{2\pi it} = (-1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ (t,1) \to (1,0) + e^{2\pi i(t+\frac{1}{2})} = (1, \cos(2pit+\pi), \sin(2\pi t+\pi)) \\ (0,t) \to (-1,0) + e^{2\pi it} = (-1, \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{cases}$$

Falta por comprobar que está bien definida, factoriza, es una identificación (el dominio es compacto y llega a un Hausdorff) y las topologías cocientes son las inducidas.

Ejercicio 2. Viendo la botella de Klein como $\mathbf{I}^2/\sim$, probar que $\partial(\mathbf{I}^2)/\sim$ es homeomorfo a la figura del ocho

Solución. Es como el ejercicio anterior, pero modificando las imágenes de los puntos $(0,t)$ y $(1,t)$.

Ejercicio 3. Viendo la esfera como$\mathbb{D}^2/\sim$, probar que $\partial(\mathbb{D}^2)/\sim$ es homeomorfo a un intervalo cerrado.

Solución. Ahora $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$. Se define la aplicación $\mathbb{S}^1 \to [-1,1]$ como

$$(x,y) \to x.$$

Falta por comprobar que factoriza, es una identificación y las topologías cocientes son las inducidas.

Ejercicio 4. Viendo el plano proyectivo como $\mathbb{D}^2/\sim$, probar que $\partial(\mathbb{D}^2)/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Solución. Ahora $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$. Se define la aplicación $\mathbb{S}^1 \to [-1,1]$ como

$$\begin{cases} (x,y) \to x & y \geq 0, \\ (x,y) \to -x & y \leq 0. \end{cases}$$

Falta por comprobar que factoriza, es una identificación y las topologías cocientes son las inducidas.