Asignatura: Topología II
Curso 4^o, Doble grado en informática y matemáticas
Fecha: 21 de septiembre de 2022
Actualización: 22/09/2022, hora: 15:32:25

El propósito de los siguientes ejercicios es probar que $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ usando una manera intuitiva de ver la recta proyectiva.

Ejercicio 1. Sea $p \notin \mathbb{R}$ y $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$. Se considera $\beta = \beta_u \cup \{(-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup \{p\} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$, donde β_u es la base usual de $\mathbb{R}$.

1. Probar que β es base de una topología τ en X y que la topología en $\mathbb{R}$ es la usual.
2. Probar que si $(x_n) \subset \mathbb{R}$, entonces $(x_n) \to p$ (para la topología τ) si y sólo si $x_n \to \infty$ (en el sentido euclídeo).
3. Sea $Y = (0,1) \cup \{q\}$, donde $q \notin (0,a)$. Se define $\beta' = \beta_u \cup \{(0,a) \cup (b,1) \cup \{q\} : a < b, a, b \in (0,1)\}$, donde β_u es la base usual de $(0,1)$. Probar que β' es una base de una topología en Y, y que la inducida en $(0,1)$ es la usual.
4. Probar que $X \cong Y$.
5. Probar que $Y \cong \mathbb{S}^1$.
6. Sea $Z = (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup \{w\}$ donde $w \notin \mathbb{R} \times \{1\}$. Se considera $\beta'' = \beta_u \cup \{(-\infty, a) \times \{1\} \cup (b, \infty) \times \{1\} \cup \{w\} : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$, donde β_u es la base usual de $\mathbb{R} \times \{1\}$. Probar que β es base de una topología τ'' en Z y que la topología en $\mathbb{R} \times \{1\}$ es la usual. Probar que $X \cong Z$.

Ejercicio 2. Se define $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to X$ como

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ p & y = 0. \end{cases}$$

1. Probar que f es sobreyectiva y continua.
2. Probar que f es abierta usando bases de abiertos.
3. Probar que f es abierta usando el criterio de sucesiones.
4. Probar que f no es cerrada.

Ejercicio 3. Probar que la aplicación anterior factoriza en $\mathbb{RP}^1$ determinando un homeomorfismo entre $\mathbb{RP}^1$ y X.