Asignatura: Topología II
Curso 4^o, Doble grado en informática y matemáticas
Fecha: 21 de octubre de 2022
Actualización: 23/10/2022, hora: 16:52:34

El siguiente resultado no es trivial.

Ejercicio 1. Sea I un espacio localmente compacto y Hausdorff. Si $f\colon X\times Y$ es una identificación, entonces $f\times 1_I$ es una identificación. Los pasos en la prueba son los siguientes:

1. Es suficiente probar que $g : Y\times I\to Z$ es continua si y sólo si $h = g\circ(f\times 1_I)$ es continua. Por tanto, supongamos que h es continua y probamos que g también lo es. Sea $(y_0,t_0)\in Y\times I$ y V un entorno abierto de $g(y_0,t_0)$. Sea $f(x_0) = y_0$ (f es sobreyectiva). Ya que h es continua e I es localmente compacto, existen entornos U de x_0 y W entorno compacto de t_0 tal que $h(U\times W)\subset V$.

2. Sea
$$O' = \{y\in Y : g(\{y\}\times W)\subset V\}.$$
Este conjunto contiene a y_0 y evidentemente $g(O')\subset W$. Faltaría por probar que O' es abierto.

3. Ya que f es una identificación, es equivalente a probar que $f^{-1}(O')$ es abierto en X. Obsérvese que
$$f^{-1}(O') = \{x\in X : g(f(x)\times U)\subset V\}.$$
Pero su complementario es
$$X - f^{-1}(O') = p_X((X\times W)\cap h^{-1}(Z-V)).$$
Este es conjunto es cerrado, donde $p_X\colon X\times Y\to X$ es la primera proyección. Aquí se usa que W es compacto, luego es cerrado, y también $X\times W$. Esto es consecuencia a que lo que hay en el paréntesis es cerrado, y por otro al siguiente resultado conocido de espacios compactos: "si Y es compacto, entonces $p_X\colon X\times Y\to X$ es una aplicación cerrada".

Volviendo al origen, es decir, a la entrada anterior y a la prueba de que F' es continua, la aplicación $p\times 1_I$ es una identificación porque p lo es y usamos el teorema anteriormente probado. Por otro lado, ya que es una identificación, F' es continua si y sólo si $F'\circ(p\times 1_I)$ es continua, y esto fue lo que se probó en la entrada anterior.

El resultado se aplicará al siguiente contexto de retracciones de deformación. Consideramos una aplicación
$$F\colon \frac{X}{\sim}\times\mathbf{I}\to Y,$$
donde F es una deformación del $X/\sim$. Para probar que F es continua, usamos que $p\times 1_I\colon X\times I\to X/\sim\times\mathbf{I}$ es una identificación por el resultado anterior (p es una identificación). Por tanto, F es continua si y sólo si $F\circ(p\times 1_{\mathbf{I}})$ es continua. Pero ahora esta aplicación tiene como dominio el espacio $X\times I$ que es más manejero que $X/\sim\times\mathbf{I}$.