Asignatura: Topología II
Curso 4^o, Doble grado en informática y matemáticas
Fecha: 15 de septiembre de 2022
Actualización: 17/09/2022, hora: 21:45:44

Ejercicio 1. Sean X e Y dos espacios topológicos y se considera su unión disjunta $Z = X \sqcup Y$, o lo que es lo mismo, $Z = (X \times \{0\}) \cup (Y \cup \{1\})$. Se define la topología suma $\tau + \tau'$ en Z como

$$\tau + \tau' = \{G \subset Z : i^{-1}(G) \in \tau\} \cup \{G \subset Z : j^{-1}(G) \in \tau'\},$$

donde i y j son las aplicaciones inclusiones naturales de X e Y en Z, respectivamente.

1. Probar que $\tau + \tau'$ es una topología.
2. Probar i y j son continuas y que que $\tau + \tau'$ es la topología más fina que hace continuas i y j.
3. Probar que $f : Z \to W$ es continua sii $f \circ i$ y $f \circ j$ son continuas.
4. Probar que i y j son embebimientos.
5. Construir bases de abiertos de Z a partir de bases de X e Y.
6. Sea $X = Y = \mathbb{R}$ con la topología usual. Probar que $X \sqcup$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$.

Ejercicio 2. Sea $X = Y = \mathbb{R}$, $0 \in X$, $0 \in Y$ y la relación de equivalencia en $X \sqcup Y$, $0 \sim 0$. Probar que $X \sqcup Y / \sim$ es homeomorfo a $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$.

Ejercicio 3. Sea $X = \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ y la relación $(0, y)R(1, y)$. Sea $Y = \mathbf{I} \times [-1, 2]$ y la relación $(x, -1)S(x, 2)$. Probar que $X/R \cong Y/S$.

Ejercicio 4. Sean $X = [0, 2]$ e $Y = [10, 20]$. En $X \cup Y$ se definen las relaciones $2 \in X \sim 10 \in Y$. Probar que $X \cup Y / \sim \cong \mathbf{I}$.

Ejercicio 5. El mismo que el anterior pero $1 \in X \sim 15 \in Y$. ¿A qué es homeomorfo el cociente?