Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Relación de ejercicios del tema 4
Actualización: 07/09/2023, hora: 22:34:09

1. Hallar base de los siguientes subespacios vectoriales y ampliar a una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ correspondiente:
   (a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 0\}$.
   (b) $U = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 0\}$.
   (c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 0, 5x + 6y + 7z = 0\}$.
2. Hallar bases y ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios, y de sus subespacios ortogonales:
   (a) $U =< (2, 3) >$.
   (b) $U =< (4, 5) >$.
   (c) $U =< (1, 2, 3) >$.
   (d) $U =< (1, 2, 3), (0, 2, 3) >$.
3. Hallar bases y ecuaciones cartesianas de los siguientes subespacios, y de sus subespacios ortogonales:
   (a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + 3y = 0\}$.
   (b) $U = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x + 3y + 4z = 0\}$.
   (c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 0, -x - y`z = 0\}$.
4. Probar que $\{(1, 2, 3), (1, 2, 0), (0, 2, 1), (2, 0, 0)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ y obtener un subconjunto suyo que sea base de $\mathbb{R}^3$.
5. Probar que $\{(1, 11), (11, 111)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
6. Extender $\{(1, 2, 3), (0, 2, 3)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ respecto de dicha base.
7. Si un vector e $\mathbb{R}^3$ tiene coordenadas $(1, 1, 1)$ respecto de la base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, ¿qué coordenadas tiene respecto de la base $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$?
8. Estudiar para qué valores de a, los vectores $\{(1, 2, 3), (1, 2, 0), (a, 0, 2)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

9. Discutir según los valores de a y b, la dimensión del subespacio

$$U =< (1, a, 3), (0, b, 1), (1, 0, b) > .$$

En cada caso, hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio.

10. Discutir según los valores de a, la dimensión del subespacio

$$U =< (1, a, -2), (1, 1, a), (1, 2, 2) > .$$

En cada caso, hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio.

11. Consideramos las bases

$$B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad B' = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}.$$

Hallar todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que tienen las mismas coordenadas en ambas bases.

12. Sea $v = (1, 1, 1)$. Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ de manera que v tenga coordenadas $(1, 0, 0)$. ¿y para que las coordenadas sean $(1, 1, 0)$?

13. Sea $v = (1, 2)$. Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^2$ de manera que v tenga coordenadas $(2, 1)$.

14. Hallar una base y ecuaciones cartesianas del subespacio $U^\perp$, donde $U =< (1, 2, 3), (0, 0, 1) >$. Extender la base a una de $\mathbb{R}^3$ y hallar las coordenadas del vector $(1, 2, 0)$.

15. Probar que $B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Hallar las coordenadas de la base usual respecto de B. Hallar las coordenadas de B respecto de la base usual.

16. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

hallar una matriz cuadrada X de orden 2 tal que $XA^t = B$.

17. Se considera el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5x + y + 4z = 0\}$. Hallar una base B' de U. Ampliarla a una base B de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas del vector $(-2, 1, 1)$ respecto de B.

18. Se considera el subespacio vectorial $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y + 3z\}$. Calcular una base de U. Ampliar la base anterior a una base B de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas del vector $(1, 1, 0)$ respecto de la base B.

19. Se considera el subespacio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5x + y + 4z = 0\}$. Hallar una base B' de U. Ampliarla a una base B de $\mathbb{R}^3$. Hallar las coordenadas del vector $(-2, 1, 1)$ respecto de B.