Tema 3. Producto escalar, vectorial...
Asignatura: Matemáticas I

Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Universidad de Granada

Prof. Rafael López Camino
Universidad de Granada

3 de septiembre de 2017

Índice

1. Métrica euclídea

Definición 1.1 *La métrica euclídea o producto escalar de* $\mathbb{R}^n$ *se define como*

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n. \qquad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

La propiedades del producto escalar son las siguientes:

1. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$.
2. $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$.
3. $\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$.
4. $\langle u,u\rangle \geq 0$ y es 0 si y sólo si $u=0$.

Proposición 1.2 *Sea V un espacio vectorial y g una forma bilineal. Entonces*

1. $\langle u,v\rangle = 0$.
2. $\langle -u,v\rangle = -\langle u,v\rangle$.

Dos vectores $u,v \in \mathbb{R}^n$ son perpendiculares y escribimos $u \perp v$, si $\langle u,v\rangle = 0$.

Definición 1.3 *Se* $v \in \mathbb{R}^n$*, se llama módulo de v a*

$$|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. $|v| = 0$ *si y sólo si* $v = 0$.
2. $|\lambda v| = |\lambda||v|$.
3. $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u,v\rangle$.
4. $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ *si y sólo si* $u \perp v$.

Teorema 1.4 (desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si* $u,v \in V$*, entonces*

$$|\langle u,v\rangle| \leq |u||v|$$

y la igualdad se da si y sólo si $\{u,v\}$ *son linealmente dependientes.*

Si u y v no son ceros, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede escribir como

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|} \leq 1.$$

Como la aplicación coseno es biyectiva de $[0,p]$ en $[-1,1]$, el número del centro es coseno de un *único* número $\theta \in [0,p]$.

Definición 1.5 *Si $u,v \in V$ y no son ceros, se define el ángulo entre u y v como $\angle(u,v) \in [0,p]$ tal que*

$$\cos\angle(u,v) = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. $\angle(u,v) = \angle(v,u)$.
2. $\angle(u,v) \in \{0,p\}$ si y sólo si $\{u,v\}$ son linealmente dependientes.
3. $\langle u,v\rangle = |u||v|\cos\angle(u,v)$.
4. $u \perp v$ si y sólo si $\angle(u,v) = p/2$.

Definición 1.6 *Sea $S \subset V$ un subconjunto de un espacio métrico (V,g). El subespacio ortogonal $S^{\perp}$ es el conjunto*

$$S^{\perp} = \{u \in V : \langle u,v\rangle = 0, \forall v \in S\}.$$

Observemos que S no tiene porqué ser un subespacio vectorial. Probaremos que $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial, luego tiene sentido preguntarse por su dimensión y es natural relacionarla con la de S. Ya que S no es, en general, un subespacio vectorial, esta pregunta tiene sentido cambiando S por el subespacio vectorial generado por S.

Proposición 1.7 *Sea (V,g) un espacio métrico y $S \subset V$.*

1. *$S^{\perp}$ es un subespacio vectorial.*
2. *Si $U \subset W$, entonces $W\perp \subset U^{\perp}$.*
3. *Si $U =< u_1,\ldots,u_m >$, entonces $U^{\perp} =< \{u_1,\ldots,u_m\} >^{\perp}$.*
4. *$V^{\perp} = \{0\}$ y $\{0\}^{\perp} = V$.*
5. *$U = (U^{\perp})^{\perp}$.*

Teorema 1.8 *Sea (V,g) un espacio no degenerado y $U \subset V$ un subespacio vectorial. Entonces $dim(U^{\perp}) = dim(V) - dim(U)$.*

2. Bases ortonormales

Definición 2.1 *Una base ortogonal del espacio euclídeo (o de un subespacio suyo) es una base donde todos los elementos son ortogonales dos a dos. Se dice que la base es unitaria si todos los elementos tiene módulo* 1. *Se dice que es una base ortonormal si es ortogonal y unitarias, es decir, si*

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Las bases ortonormales son muy útiles, especialmente, por el siguiente resultado:

Proposición 2.2 *Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal.*

1. *Si $v \in V$, entonces $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i$.*
2. *Si $u, v \in V$, entonces $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle$.*
3. *Si $v \in V$, entonces $|v|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle^2$.*

Siempre es posible construir bases ortogonales, unitarias y ortonormales. Para hallar una base unitaria, basta dividir cada elemento de la base por su módulo.

Construcción de bases ortogonales. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de un espacio vectorial. La base ortogonal $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{2}_n\}$ es buscamos es la obtenida por el siguiente proceso, llamado método de Gram-Schmidt, el cual es un método recurrente determinado del siguiente modo:

1. Sea $\bar{e}_1 = e_1$.
2. Se halla $\bar{e}_2 = e_2 + \lambda \bar{e}_1$ de manera que $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = 0$. Con esta condición obtenemos
$$0 = \langle e_2, \bar{e}_1 \rangle + \lambda \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle \Rightarrow \lambda = -\frac{\langle e_2, \bar{e}_1 \langle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle}.$$
3. Se halla $\bar{e}_3 = e_3 + \lambda \bar{e}_2 + \mu \bar{e}_1$ de manera que
$$\langle \bar{e}_3, \bar{e}_2 \rangle = \langle \bar{e}_3, \bar{e}_1 \langle = 0.$$
De aquí,
$$\lambda = -\frac{\langle e_3, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle}, \mu = -\frac{\langle e_3, \bar{e}_2 \rangle}{\langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \langle}.$$

y así se va siguiendo el proceso, obteniendo en cada paso

$$\bar{e}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_k, \bar{e}_i \rangle}{\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle} \bar{e}_i.$$

Obtenida la base ortogonal, la base ortonormal sería

$$\{\frac{\bar{e}_1}{|\bar{e}_1|}, \frac{\bar{e}_2}{|\bar{e}_2|}, \dots, \frac{\bar{e}_n}{|\bar{e}_n|}\}.$$

Recordemos también que ya que una métrica euclídea es no degenerada tenemos el siguiente resultado: si B' es una base ortonormal de un subespacio U, entonces existe una base ortonormal $B' \cup B''$ de V, es decir, podemos *ampliar* una base ortonormal de un subespacio hasta obtener una base ortonormal del espacio entero.

3. Subespacios ortogonales, simetría y proyección ortogonal

Definición 3.1 *Sea $S \subset V$ un subconjunto de un espacio euclídeo V. El subespacio ortogonal $S^\perp$ es el conjunto*

$$S^\perp = \{u \in V : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in S\}.$$

Observemos que S no tiene porqué ser un subespacio vectorial, sin embargo, es inmediato que $S^\perp$ es un subespacio vectorial. Probaremos que $S^\perp$ es un subespacio vectorial, luego tiene sentido preguntarse por su dimensión y es natural relacionarla con la de S cuando S es un subespacio vectorial (o con $L(S)$ en general).

Proposición 3.2 *Sea $S \subset V$.*

1. *$S^\perp$ es un subespacio vectorial.*
2. *Si $U \subset W$, entonces $W^\perp \subset U^\perp$.*
3. *Si $U =< u_1, \dots, u_m >$, entonces $U^\perp =< \{u_1, \dots, u_m\} >^\perp$.*
4. *$U = (U^\perp)^\perp$.*

Más interesante es el siguiente resultado:

Teorema 3.3 *Si U es un subespacio de V, entonces*

1. *$dim(U^\perp) = dim(V) - dim(U)$.*

2. $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.

En particular, si B_1 es una base de U y B_2 una base de $U^{\perp}$, entonces $B_1 \cup B_2$ es una base de V.

De nuevo el uso de bases ortonormales facilita el trabajo a la hora de hallar $U^{\perp}$:

Teorema 3.4 *Sea B una base ortonormal de V y U un subespacio de dimensión $n-m$.*

1. *Si $Ax = 0$ son las ecuaciones cartesianas de U respecto de B, entonces una base de $U^{\perp}$ es $\{(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = 0)\}$.*

2. *Si una base de $U^{\perp}$ es $\{(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n = 0)\}$, entonces $Ax = 0$ son las ecuaciones cartesianas de U respecto de B.*

De la última parte del teorema 3.3, y llamando $B_1 = \{e_1, \ldots, e_m\}$ y $B_2 = \{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$, si $v \in V$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i e_i = u + w,$$

donde $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$.

Definición 3.5 1. *Se llama simetría ortogonal respecto de U a la aplicación*

$$S_U = S : V \to V, \;\; S(v) = u - w, \;\; (v = u + w).$$

2. *Se llama proyección ortogonal sobre U a la aplicación*

$$p_U : V \to V, \;\; p(v) = u, \;\; (v = u + w)$$

Proposición 3.6 *Con la notación anterior,*

1. *S es un isomorfismo con $S \circ S = 1_V$.*

2. $S_{|U} = 1_U$.

3. $S_{|U^{\perp}} = -1_{U^{\perp}}$.

4. *S es diagonalizable, con valores propios 1 y -1 y los subespacios propios son $V_1 = U$, $V_{-1} = U^{\perp}$.*

Proposición 3.7 *Con la notación anterior,*

1. *p es una aplicación lineal.*

2. *$p \circ p = p$.*

3. *$Ker(p) = U^{\perp}$ e $Im(p) = U$. .*

4. *$p_{|U} = 1_U$.*

5. *p es diagonalizable, con valores propios 1 y 0 y $V_1 = U$, $V_0 = U^{\perp}$.*

4. Producto vectorial

El producto vectorial sólo define en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Definición 4.1 *Si $u, v \in \mathbb{R}^3$, se define el producto vectorial de u por v como*

$$u \wedge v = u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

También es habitual escribir la igualdad anterior como el determinante

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

donde el determinante quiere decir que uno desarrolla el determinante de la forma habitual, obteniendo una combinación lineal en i, j y k, sustituimos i, j, k por $(1,0,0), (0,1,0)$ y $(0,0,1)$, obteniendo la definición.

Proposición 4.2 1. *$u \times v = -v \times u$.*

2. *$u \times u = 0$.*

3. *$(\lambda u) \times v = u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v)$.*

4. *$(u + v) \times w = u \times w + v \times w$.*

5. *$u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.*

La relación entre el producto escalar y el producto vectorial viene por la siguiente propiedad

$$\langle u \times v, w \rangle = det(u, v, w). \tag{1}$$

Esta igualdad también prueba que se podría definir el producto vectorial $u \times v$ diciendo que es el único vector de $\mathbb{R}^3$ que satisface la propiedad anterior *para todo $w \in \mathbb{R}^3$*. Como consecuencia de (1) tenemos:

Proposición 4.3

1. *$u \times v \perp u, u \times v \perp u$.*

2. *$|u \times v| = |u||v| \sin \angle(u, v)$.*

3. *Si $\{u, v\}$ son linealmente independientes, entonces $\{u, v, u \times v\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.*