Matemáticas I. Examen del tema 3

– Grado en Ingeniería Electrónica Industrial –

Curso 2017/18

Nombre:

1. Hallar los valores del parámetro a para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable.

   Cuando lo sea, hallar una matriz regular P para que PAP^{-1} sea una matriz diagonal.

2. Se considera el subespacio $U = L\{(1,-1,2,-2),(1,1,-2,3)\} \subset \mathbb{R}^4$. Hallar la expresión de la simetría ortogonal respecto de U.

3. Si $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y+z-t = 0, x-y+2z+t = 0\}$, hallar las ecuaciones cartesianas de $U^\perp$ y una base ortonormal de $U^\perp$.

Todas las preguntas puntúan lo mismo

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones:

1. Calculamos el polinomio característico de A que es $-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2$. Usando Ruffini, vemos que $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ son raíces, concretamente, $P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$. Por tanto, $a_2 = 1$ y $a_1 = 2$. Hallamos la multiplicidad geométrica de cada uno de los dos valores propios. Para $\lambda = 2$, como $1 \leq g_2 \leq a_2 = 1$, deducimos que $g_2 = 1$. Para $\lambda = 1$, tenemos

$$g_1 = 3 - r(A - 1I) = 3 - r \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - r \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$$

   Observemos que si $a = 0$, la segunda fila es 0, y en caso contrario, es escalonada. Por tanto: si $a = 0$, $g_1 = 3-1 = 2$ y si $a \neq 0$, $g_1 = 3-2 = 1$. Concluimos que la matriz es diagonalizable si y sólo si $g_1 = 2$, es decir, si y solo si $a = 0$.

   Para $a = 0$, hallamos los valores propios. Para $\lambda = 1$, tenemos$(x, y, z) \in V_1$ si y sólo si

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x-z \\ x+z \end{pmatrix},$$

   es decir, $x - z = 0$. Resolviendo el sistema (tomando como parámetros y y z, tenemos que una base de V_1 es $\{(0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$. Para $\lambda = 2$, tenemos

$$0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -x-y-z \\ x \end{pmatrix},$$

   luego $x = 0$ y $-y - z = 0$. Luego dando valores a y ($y = 1$), tenemos que una base de V_2 es $\{(0, 1, -1)\}$. La matriz P que nos pide es la inversa de poner los vectores propios en columnas, es decir,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Dicha matriz es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Hallamos una base de $U^\perp$. Entonces $(x, y, z, t) \in U^\perp$ si y sólo si $\langle (x, y, z, t), (1, -1, 2, -2)\rangle = \langle (x, y, z, t), (1, 1, -2, 3)\rangle = 0$, es decir, si $x-y+2z-2t = 0$ y $x+y+-2z+3t = 0$. Resolvemos

el sistema, dando valores $z=1$, $t=0$, y $z=0$ y $t=2$, obteniendo: $\{(0,2,1,0),(-1,-5,0,2)\}$. Escribimos un vector arbitrario (x,y,z,t) en combinación lineal de la base

$$\{e_1=(1,-1,2,-2), e_2=(1,1,-2,3), e_3=(0,2,1,0), e_4(-1,-5,0,2)\},$$

es decir, $(x,y,z,t)=ae_1+be_2+ce_3+de_4$. Esto nos da el sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} a+b-d & =x \\ -a+b+2c-5d & =y \\ 2a-2b+c & =z \\ 2a+3b+2d & =t. \end{array}\right.$$

La solución es

$$a=\frac{1}{10}(5x-y+2z), b=\frac{1}{5}(t+2x), c=\frac{1}{5}(2t-x+y+3z), d=\frac{1}{10}(2t-x-y+2z).$$

Por tanto $S(x,y,z,t)=ae_1+be_2-ce_3-de_4$ es

$$S(x,y,z,t)=\frac{1}{5}(4x-y+2z+2t,-x-4y-2z+2t,2x-2y-z-4t,2x+2y-4z+t).$$

3. Una base de $U^\perp$ viene dada por los coeficientes de las ecuaciones cartesianas de U, luego una base es $B=\{(1,-1,1,-1),(1,-1,2,1)\}$. Ya que no son proporcionales, la dimensión de $U^\perp$ es 2, y las ecuaciones cartesianas vienen dada por

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & -1 & y \\ 1 & 2 & z \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}=2.$$

Como la submatriz de orden 2 de abajo a la izquierda tiene determinante 3, entonces las ecuaciones se obtienen al hallar los determinantes de orden 3 de añadir la tercera columna y la primera y la segunda fila, obteniendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & z \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & y \\ 1 & 2 & z \\ -1 & 1 & t \end{vmatrix}=0.$$

Luego las ecuaciones cartesianas son:

$$3x-2z+t=0, 3y+2z-t=0.$$

Para obtener una base ortonormal, usamos Gram-Schmidt con $e_1 = (1,-1,1,-1)$, $e_2 = (1,-1,2,1)$. Entonces $v_1 = e_1$ y

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_1, e_2\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}) \to (1,-1,5,7).$$

Por tanto, como $\langle e_1, e_1\rangle = 4$ y $\langle v_2, v_2\rangle = 76$ concluimos que una base ortonormal es

$$\{\frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{76}}(1,-1,5,7)\}.$$