Matemáticas I. Examen del tema 2

– Grado en Ingeniería Electrónica Industrial –

Curso 2017/18

Nombre:

1. Hallar las ecuaciones cartesianas del subespacio $U = L\{(1,1,0,0),(0,1,0,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Ampliar $\{(1,1,0,0),(0,1,0,-1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

2. Sean las bases de $\mathbb{R}^3$ dadas por $B = \{(1,1,-2),(0,2,0),(-1,1,1)\}$ y $B' = \{(1,0,-1),(2,1,1),(0,1,1)\}$. Si $v \in \mathbb{R}^3$ es el vector que tiene coordenadas $(-2,1,3)$ respecto de B, hallar las coordenadas de v respecto de B'.

3. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x+y, x+y)$, hallar bases y ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

4. Se consideran bases $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B' = \{(1,1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Hallar $M(f, B_u, B'_u)$ de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que satisface:

$$f(1,1,1) = (1,2), \;\; f(1,1,0) = (1,2), \;\; f(1,0,0) = (2,4).$$

Todas las preguntas puntúan lo mismo

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones:

1. Ya que los dos vectores no son proporcionales, son linealmente independiente, luego $dim(U) = 2$, y así, estamos buscando $dim(\mathbb{R}^4) - dim(U) = 4 - 2$ ecuaciones cartesianas. Entonces $(x, y, z, t) \in U$ si y sólo si
$$r\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} = 2.$$
Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces los dos determinantes de orden tres al añadir la tercera columna, y la tercera fila y cuarta fila, son cero. Por tanto:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = 0.$$
Hallando los determinantes, tenemos $z = 0$ y $t - x + y = 0$.

   Para la segunda parte, añadimos dos vectores de manera que los cuatro vectores sean linealmente independientes. Para ello, lo colocamos en las dos últimas finals de una matriz, para que tenga rango 4:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Por tanto, una base es $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

2. Como el vector v tiene coordenadas $(-2, 1, 3)$ respecto de la base B, entonces
$$v = -2(1, 1, -2) + 1(0, 2, 0) + 3(-1, 1, 1) = (-5, 3, 7).$$
Para hallar las coordenadas (x, y, z) de este vector respecto de B', tenemos por definición
$$(-5, 3, 7) = x(1, 0, -1) + y(2, 1, 1) + z(0, 1, 1).$$
Igualando coordenada a coordenada, tenemos $x + 2y = -5$, $y + z = 3$ y $-x + y + z = 7$, cuya solución es $(-4, -1/2, 7/2)$.

3. La expresión matricial de f respecto de las bases usuales es $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $r(A) = 1$, entonces $dim(Ker(f)) = 3 - 1 = 2$ y $dim(Im(f)) = 1$. Por otro lado, $Ker(f) = \{(x, y, z) \in$

$\mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$, luego $x + y = 0$ es la ecuación cartesiana de $Ker(f)$. Tomando como parámetros y y z, tenemos $x = -1, y = 1, z = 0$, y $x = 0, y = 0, z = 1$, luego $Ker(f) =< (-1, 1, 0), (0, 0, 1) >$.

Para la imagen, sabemos que las columnas de A forman un sistema de generadores, luego una base de $Im(f)$ es $\{(1, 1)\}$. Para la ecuación cartesiana de $Im(f)$, sabemos que $(x, y) \in Im(f)$ si

$$r\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0.$$

4. Llamamos $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Ponemos los elementos de B_u respecto de B:

$$(1, 0, 0) = xe_1 + ye_e + ze_3 = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} &x + y + z = 1 \\ &x + y = 0 \\ &x = 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $(0, 0, 1)$. Por tanto

$$f(1, 0, 0) = 0f(e_1) + 0f(e_2) + 1f(e_3) = (2, 4).$$

Repitimos la operación para los otros dos vectores de B_u:

$$\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ x = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow (x, y, z) = (0, 1, -1) \Rightarrow f(1, 0, 0) = 1f(e_2) - 1f(e_3) = (-1, -2),$$

$$\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow (x, y, z) = (1, -1, 0) \Rightarrow f(1, 0, 0) = 1f(e_1) - 1f(e_2) = (0, 0),$$

luego

$$M(f, B_u, B_u') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$