Matemáticas I. Examen del tema 1
– Grado en Ingeniería Electrónica Industrial –
Curso 2017/18

Nombre:

1. (a) Mostrar con un ejemplo que para matrices cuadradas, $|A + B| \neq |A| + |B|$.
   (b) Probar que si una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisface $AA^t = I$, entonces $|A| = \pm 1$.

2. Hallar la matriz escalonada (y reducida) por filas y la matriz escalonada (y reducida) por columnas de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

3. Según los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$, estudiar si el sistema es compatible:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + 2y - 3z & = & a \\ 2x + 6y - 11z & = & b \\ x - 2y + 7z & = & c \end{array} \right.$$

4. Según el parámetro $a \in \mathbb{R}$, discutir y resolver

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax + y + 2z & = & 1 \\ ax + y + z & = & 2 \\ x + ay + 2z & = & 1 \\ 3x + y - z & = & 4 \end{array} \right.$$

Todas las preguntas puntúan lo mismo
Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones:

1. (a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces $|A| = -1$ y $|B| = 2$ y

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + B| = 0.$$

   (b) Tomando determinantes en $AA^t = I$, tenemos $|A||A^t| = |I| = -1$, donde hemos usado que el determinante de I es 1. Como $|A^t| = |A|$, tenemos $|A|^2 = 1$, luego $|A| = \pm 1$.

2. Para filas, empezamos con F_{12}, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 16 \end{pmatrix} \underset{F_{31}(-2)}{\overset{F_{41}(-3)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \underset{F_{32}(1)}{\overset{F_{42}(2)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{34}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_{23}(-3)}{\overset{F_{13}(-7)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{12}(-5)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{1}(1/4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La primera matriz del último renglón es la matriz escalonada por filas, y la última, es la reducida.

   Por columnas, haciendo primero $C_1(1/4)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 13 & 14 & 16 \end{pmatrix} \underset{C_{21}(-5), C_{31}(-6)}{\overset{C_{41}(-7)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \underset{C_{32}(-2)}{\overset{C_{42}(-3)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_{34}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_{13}(-3)}{\overset{C_{23}(2)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   En el último renglón, la primera matriz es la escalonada por columas, y la segunda, la reducida por columnas.

3. El determinante de la matriz A de coeficientes es 0, luego el rango es menor que 3. Ya que la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ tiene determinante $-$, el rango de A es al menos 2, luego $r(A) = 2$.

Hallamos el rango de la matriz ampliada por determinantes. Se añade a la submatriz anterior la segunda fila y la parte correspondiente de la columna del término independiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 6 & b \\ 1 & -2 & c \end{vmatrix} = -10a + 4b + 2c.$$

Por tanto:

(a) Si $-5a + 2b + c \neq 0$, $r(A|b) = 3$; como $r(A) = 2$, el sistema es incompatible.

(b) Si $-5a + 2b + c = 0$, entonces $r(A|b) = 2$; como $r(A) = 2$, el sistema es compatible indeterminado.

4. Hallamos rangos. La submatriz de A dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene determinante -3, luego $r(A) \geq 2$. Añadimos filas y columnas a esta submatriz y calculamos los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a - 3 \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 8a + 9.$$

Las raíces del primero son 3 y del segundo 1 y -9, luego los dos determinantes no se anulan simultaneamente, luego $r(A) = 3$. Para el rango de $A|b$ hallamos su determinante, obteniendo $3a^2 - 12a + 9$ y sus raíces son 1 y 3. Por tanto,

(a) Si $a \not{1}, -3$, $r(A|b) = 4$, y el sistema es incompatible.

(b) Si $a = 1$ o $a = -3$, $r(A|b) = 3$ y el sistema es compatible indeterminado.

Hallamos las raíces para estos dos valores, sustituyendo en el sistema y tomando las tres ecuaciones que nos da el rango de A: para $a = 1$, la del primer determinante y para $a = 3$, la del segundo.

(a) Caso $a = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

y el sistema queda: $x + y + 2z = 1$, $-2y - 7z = 1$, $-z = 1$, luego $z = -1$, $y = 3$ y $x = 0$.

(b) Caso $a = 3$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to$$

luego $z = -1$, $-8y = -6$, es decir, $y = 3/4$ y $x = -3y - 2z + 1 = 3/4$.