Relación de ejercicios del tema 4

Asignatura: Matemáticas I. Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Demostrar que $|\alpha(t)|$ es una constante no nula si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

2. Parametrizar la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y hallar su curvatura. Hallar la longitud de la elipse.

3. Para la curva $\alpha(t) = (2t - \pi \sin(t), 2 - \pi \cos(t))$, probar que el punto $P = (0, 2)$ tiene dos preimágenes y hallar para cada una de ellas la recta tangente.

4. Hallar los puntos singulares de la curva $\alpha(t) = (3\cos(t) - \cos(3t), 3\sin(t) - \sin(5t))$.

5. Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta tangente a la curva $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$ en el punto $t = 2$. Hallar la curvatura y torsión en cada punto.

6. Parametrizar las curvas:

$$a)\ y - z^2 = 0, xz - y^2 = 0, \quad b)\ x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1, \quad c)\ x = z^2, y^2 = 1 - x.$$

$$d) y^2 + (z - 1)^2 = 1, x + y^2 = 1$$

7. Estudiar si la curva $\alpha(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin(t/2))$ es regular y probar que está contenida en la esfera de radio 2 y centra en el origen.

8. Parametrizar por el arco la curva $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$.

9. Parametrizar la curva que consiste en los puntos de intersección de las rectas tangentes a la hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con el plano $z = 0$.

10. Probar que si los planos osculadores de una curva pasan por un punto fijo, entonces la curva es plana.

11. Probar que si todas las rectas tangentes a una curva son paralelas a un plano dado, entonces la curva es plana.

12. Probar que si todas las rectas normales de una curva espacial pasan por un mismo punto, entonces la curva es una circunferencia.

13. Probar que si una curva satisface que los vectores tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija del espacio, entonces κ y τ son constantes.

14. Para la curva $\alpha(t) = (2t, 9t^2, 27t^3)$ hallar la curvatura y torsión y estudiar si κ/τ es constante.

15. Hallar la ecuación cartesiana del plano normal y rectificante de la curva $\alpha(t) = (3\sin(t), 3\cos(t) - 5, 4t + 1)$.

16. Hallar los puntos singulares de la curva $\alpha(t) = (t^2 + 1, t^3 - 1)$. Hallar las ecuaciones de la recta tangente en $t = 0$.

17. Estudiar en qué puntos las curvas $\alpha(t) = (t, t^3)$ y $\beta(t) = (t^2, t^6)$ son una una reparametrización de la otra. Hallar en cada una de ellas la recta tangente en $t = 0$.

18. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes, normal y binormal en cada punto de la hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificantes en cada punto. Probar que las rectas tangentes a α forman un ángulo con una dirección fija de $\mathbb{R}^3$.

19. Para la hélice del ejercicio anterior, hallar la longitud de la curva entre el punto $P = (1, 0, 0)$ y el punto inmediatamente posterior que se encuentra encima de P.

20. Para la curva $\alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t), a)$, hallar el vector tangente en el punto $P = (0, r, a)$. Hallar la ecuación del plano normal en el punto anterior.

21. Lo mismo que en el ejercicio anterior, pero para la curva $\alpha(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 5t)$ en el punto $(0, 2, 5\pi/2)$.

22. Hallar las ecuaciones implícitas de la curva $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Hallar el triedro de Frenet en el punto $t = 1$. Hallar la expresión de la curvatura y de la torsión.

23. Para la curva $\alpha(t) = (t, -t^2, 1 + t^3)$, hallar el triedro de Frenet, curvatura y torsión el punto de coordenadas $P = (0, 0, 1)$.

24. Hallar la torsión de la curva $\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), t)$.

25. Probar que para una curva p.p.a., se tiene $\alpha'''(s) = -\kappa(s)^2 T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s)$.

26. La curva $\alpha(t) = (t, e^t + e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$, se llama catenaria. Hallar la curvatura de α.

27. Hallar el triedro de Frenet, curvatura y torsión de $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, t)$.

28. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva con curvatura $k_\alpha(t)$. Calcula la curvatura de la curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = \alpha(-t)$.

29. Reparametrizar por el arco la curva $\alpha(t) = (-\cos(e^t), \sin(e^t))$. Si β es dicha reparametrización, hallar el triedro de Frenet, curvatura y torsión de β.

30. Probar que los planos normales a una curva contenida en una esfera pasan por el centro de la esfera.

31. Reparametrizar por el arco $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \mathrm{sen}(t), e^t)$. Hallar el triedro de Frenet en el punto $P = (1, 0, 1)$.

32. Probar que las rectas normales a la curva $\alpha(t) = (2\cos(t), 2\ \mathrm{sen}(t), 5t)$ intersecan perpendicularmente el eje z (la recta determinada por el origen y el vector $(0, 0, 1)$).

33. Para la curva $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3})$, probar que κ/τ es constante.