Relación de ejercicios del tema 3

Asignatura: Matemáticas I. Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Demostrar o dar un contraejemplo para decidir la veracidad de las siguientes afirmaciones:
   (a) Toda matriz regular es diagonalizable.
   (b) Si A es diagonalizable, entonces A^n es diagonalizable para $n \in \mathbf{N}$.
   (c) Si A y B son diagonalizables, entonces $A+B$ y AB son diagonalizables.
   (d) Una matriz cuadrada diagonalizable es regular si y sólo si 0 no es valor propio.
   (e) Si λ es valor propio de A y A es regular, entonces $1/\lambda$ es valor propio de A^{-1}.

2. Estudiar si son diagonalizables las siguientes matrices, y en su caso, calcular las matrices de paso P tal que $A = P^{-1}DP$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Estudiar para qué valores de los parámetros a y b la matriz siguiente es diagonalizable, y hallar base de vectores propios.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

4. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, definido en la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ por

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (a+1)e_1 - ae_2 + ae_3 \\ f(e_2) &= (a+b)e_1 - ae_2 + (a-1)e_3 \\ f(e_3) &= be_1 - e_2 \end{aligned}$$

   con $a, b \in \mathbb{R}$. Hallar los valores propios de f, comprobando que no dependen de a ni de b, y hallar el valor de a para que f sea diagonalizable. Hallar entonces una base de vectores propios.

5. En $\mathbb{R}^3$ aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal a partir de las bases:

   (a) $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$.

   (b) $B_2 = \{(0, 1, 1), (1, -2, 2), (3, 0, 1)\}$.

6. Descomponer el vector $(1, 3, -1, 4)$ en suma de dos vectores, uno perteneciente al subespacio $U = L\{(2, 1, 0, 1), (0, 3, 1, 1)\}$ y el otro a $U^{\perp}$.

7. Sea V un espacio vectorial, y sean u y v dos vectores unitarios que forman un ángulo de $\pi/3$. Hallar $|2u + v|$.

8. En $\mathbb{R}^4$, se considera el subespacio

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0\}.$$

   Calcular la proyección ortogonal del vector $(0, 1, 1, 1)$ sobre U y sobre $U^{\perp}$.

9. En $\mathbb{R}^4$, se considera el subespacio $U = L\{(1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, -1)\}$.

   (a) Calcular una base y ecuaciones cartesianas de $U^{\perp}$.

   (b) Hallar una base ortonormal de U.

10. Calcular la proyección ortogonal del vector $v = (1, 2, 1)$ sobre el subespacio $U = L\{(0, 1, 2), (1, 2, 3)\}$ y su distancia a U.

11. Demostrar que si u y v son dos vectores de un espacio vectorial tales que $|u| = |v|$, entonces los vectores $u + v$ y $u - v$ son ortogonales.

12. Hallar una base ortogonal del subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por la ecuación cartesiana $2x + 4y + z + 3t = 0$.

13. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$. Hallar una base $B_1 = \{e_1, e_2\}$ de U y a partir de ella, una base ortonormal B_2 por el método de Gram-Schmidt. Hallar una base de $U^{\perp}$. Calcular la proyección ortogonal sobre U y la simetría respecto de U de $v = (-1, -2, 3)$.

14. Hallar una base de $U^{\perp}$, donde $U = L\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, -1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Hallar la expresión de la simetría ortogonal S_U.

15. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

16. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x + y, x + y)$, hallar bases y ecuaciones cartesianas de $\mathrm{Ker}(f)^\perp$ e $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

17. En $\mathbb{R}^4$, sea $U = L\{(1, 1, 0, 0)\}$. Hallar las expresiones de S_U y p_U.