Relación de ejercicios del tema 2

Asignatura: Matemáticas I. Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Decidir razonadamente si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales:

   (a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = 0, x - z = 0\}$

   (b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + t = 2\}$

   (c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xy = 3\}$

   (d) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y = 0\}$

   (e) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon 2x - y + t = 0\}$

   (f) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - y^2 = 0\}$

2. Para cada uno de los siguientes casos decidir si el vector v pertenece o no al subespacio vectorial U:

   (a) $v = (1, -2, 5)$, $U = L\{(1, -3, 2), (2, -4, -1), (1, -5, 7)\}$

   (b) $v = (8, 1, 1)$, $U = L\{(1, -3, 2), (2, -1, 1)\}$

   (c) $v = (1, -3, 2, -1)$, $U = L\{(2, -1, 0, 0), (-1, 3, -2, 1)\}$

3. Decidir si los vectores de los siguientes conjuntos son linealmente independientes:

   (a) $\big\{(1, 1, -2, 3, 4), (2, 3, 3, -1, 3), (5, 7, 4, 1, 5)\big\} \subset \mathbb{R}^5$

   (b) $\big\{(1, 1, 1), (2, 3, -1), (0, 1, 7), (-6, 5, 14)\big\} \subset \mathbb{R}^3$

   (c) $\big\{(2, 1, 3), (4, -1, 5), (2, 1, 2)\big\} \subset \mathbb{R}^3$

   (d) $\big\{(1, 1, 1), (2, 3, 4), (-1, 3, 7), (2, 4, 6)\big\} \subset \mathbb{R}^3$

4. Decidir si los siguientes conjuntos de vectores son o no una base del subespacio vectorial U:

   (a) $S = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$, $U = \mathbb{R}^3$

   (b) $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4), (2, 6, 8, 5)\}$, $U = \mathbb{R}^4$

(c) $S = \{(1,2,0),(0,0,1)\}$, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = y\}$

(d) $S = \{(1,2,3,0),(0,0,0,1),(-1,1,0,4)\}$, $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y - z = 0\}$

5. Obtener una base de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales:

   (a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}$

   (b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y = 0, x - z = 0\}$

   (c) $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon 3x - z, y - t = 0\}$

   (d) $U = L\{(1,-2,5,-3),(2,3,1,-4),(3,8,-3,-5)\}$

6. Encontrar unas ecuaciones cartesianas para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales:

   (a) $U = L\{(1,1,-2),(2,-3,1)\}$

   (b) $U = L\{(1,1,2),(-1,1,1),(5,-3,2)\}$

   (c) $U = L\{(1,2,-1,3),(-2,-4,2,-6)\}$

   (d) $U = L\{(1,1,2,-3,-1),(1,0,1,0,1),(0,1,1,2,-3)\}$

7. Sean $B = \{(1,0,-1),(2,1,1),(0,1,1)\}$ y $B' = \{(1,1,-2),(0,2,0),(-1,1,1)\}$.

   (a) Demostrar que B y B' son bases de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcular el vector $(4,-2,5)$ en coordenadas respecto de B y de B'.

   (c) Calcular el vector $(1,-2,0)_B$ en coordenadas respecto de B'.

   (d) Calcular el vector $(-2,1,3)_{B'}$ en coordenadas respecto de B.

8. Consideremos los vectores v_1, v_2 y v_3 de $\mathbb{R}^3$ dados por $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,1)$ y $v_3 = (-1,-2,-1)$. Se pide:

   (a) Calcular una base B del subespacio $U = L\{v_1, v_2, v_3\}$.

   (b) Ampliar la base B del apartado anterior hasta obtener una base B' de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Calcular unas ecuaciones cartesianas del subespacio U del apartado (a).

9. Se pide:

   (a) Calcular una base para $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x - 3t = 0,\ y + 2z = 0\}$. Ampliarla hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Comprobar si $S = \{(3,0,0,1),(0,-2,1,0),(-3,-2,1,-1)\}$ es una base de U.

10. Calcular una base de los subespacios:

    (a) $U = L\{(1,1,0),(1,0,0),(1,3,0)\}$
    (b) $V = L\{(1,1,0,2),(0,0,0,1),(2,2,0,1),(1,1,0,3)\}$

11. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y determinar en su caso una base y ecuaciones cartesianas del núcleo e imagen.

    (a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(u) = u + u_0$ con u_0 un vector fijo de $\mathbb{R}^3$.
    (b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(u) = u_0$ con u_0 un vector fijo de $\mathbb{R}^3$.
    (c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x^2, 0, y+z)$.
    (d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y+4z, x+y+2z, x+y+3z)$.
    (e) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z,t) = (3x-2y-z-4t, x+y-2z-3t)$.
    (f) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (2x+y+3z, 3x-y+z, -4x+3y+z)$.
    (g) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (z, x+y, -z)$.
    (h) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x+y, 0)$.

12. ¿Existe una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ de forma que su núcleo es el subespacio generado por $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$ y la imagen está generada por $(1,0,0,0)$ y $(1,2,0,0)$?

13. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $U = L\{(1,1,1)\}$ y $W \equiv x+y+z = 0$. Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ de forma que $Ker(f) = U$ e $Im(f) = W$.

14. En el espacio $\mathbb{R}^3$ se considera el endomorfismo dado por:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= 2e_2 + e_3 \end{aligned}$$

    en la base $B = \{e_1 = (0,1,0), e_2 = (-1,0,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

    (a) Calcular las matrices $M(f,B,B)$, $M(f,B,B_u)$, $M(f,B_u,B_u)$, $M(1_V,B,B_u)$ y $M(1_V,B_u,B)$.
    (b) Hallar una base y ecuaciones cartesianas del núcleo e imagen de f.

15. Se consideran bases $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B' = \{(1,1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que satisface:

$$f(1,1,1) = (1,2),\;\; f(1,1,0) = (1,2),\;\; f(1,0,0) = (2,4).$$

    (a) Hallar una base y unas ecuaciones cartesianas del núcleo e imagen de f. Hallar $M(f;B_u,B'_u)$.