Relación de ejercicios del tema 1

Asignatura: Matemáticas I. Grado en Ingeniería Electrónica Industrial
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Sean A y B dos matrices de orden 4×5 y C, D, E y F matrices con órdenes 5×2, 4×2, 5×2 y 5×4, respectivamente. Determinar cuáles de las siguientes expresiones matriciales están bien definidas y, en tal caso, calcular el orden de la matriz resultante:

   BA, $AC + D$, $AE + B$, $AB + B$, $E(A + B)$, $E(AC)$, $E^t A$, y $(A^t + E)D$.

2. Consideremos las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$
   Calcular, si es posible, $A^2 - (AB) + B^2$ y $2A + C^2$.

3. Dadas las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
   calcular, si es posible: AB, $D + E$, $D - E$, DE, ED, BC y $C^t B$.

4. Para las matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$
   comprobar que se verifican estas propiedades:

   a) $AB \neq BA$ (el producto de matrices no es conmutativo),

b) $(AB)^t = B^tA^t$ (la traspuesta del producto es el producto de las traspuestas cambiado de orden).

5. Sabemos que si dos números reales a y b verifican $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Encontrar un ejemplo de dos matrices cuadradas de orden dos A y B que cumplan $AB = 0_{2\times 2}$ y ninguna de las dos matrices sea la matriz cero.

6. Estudiar si las siguientes matrices tienen inversa y, en su caso, calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz X de orden 2×2 que resuelve las ecuaciones matriciales: $BX = C$, $AX - B = C$ y $XC^t = B$.

8. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -7 & 17 \end{pmatrix}.$$

9. Para la matriz D del ejercicio anterior calcular los menores adjuntos δ_{13}, δ_{34} y δ_{21}. Calcular también el determinante $|D|$.

10. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & 14 & 4 \end{vmatrix}.$$

11. Analizar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden entonces $|A+B| = |A| + |B|$.

12. Determinar el rango de las siguientes matrices en función del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} a & a+3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 0 & a+1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+3 \\ 1 & a & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+2y+10z & = & 18 \\ 2x+3y+12z & = & 23 \\ 2y+5z & = & 11 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & -1 \\ 3x-y+2z & = & 1 \\ 5x+3y-4z & = & 2 \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 6 \\ 2x-y+4z & = & 2 \\ 4x+3y-2z & = & 14 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x-3y+4z-2t & = & 5 \\ 2y+5z+t & = & 2 \\ y-3z & = & 4 \end{array} \right..$$

14. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales escalonados:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ y+z+t & = & 2 \\ z+t & = & 3 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & -z-t \\ y+z+t & = & 3 \end{array} \right., \qquad \{x-y+10z = 8 .$$

15. Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -4y-z & = & -7 \\ x+y+z & = & 2 \\ x-2y+z & = & -2 \\ -x+2y & = & 3 \end{array} \right., \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y+z-2s+t & = & 2 \\ x+2y+s & = & 7 \\ 2x-y+z+4s+t & = & 0 \end{array} \right..$$

16. Calcular los valores del parámetro a para los que el siguiente sistema de ecuaciones lineales es incompatible o compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-y-z-2t & = & 0 \\ x+ay+z+t & = & 0 \\ x+2y+5z+7t & = & 0 \\ 2x+y+4z+5t & = & 0 \end{array} \right..$$

17. Discutir y resolver, cuando sea posible, los sistemas de ecuaciones lineales siguientes en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z &=& 1 \\ -x-y+z &=& -2 \\ x+az &=& -1 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+4ay-2az &=& 2 \\ x-3az &=& 1 \\ x+3ay+(a-1)z &=& 2 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y+az &=& 2 \\ 5x+3y+az &=& 2 \\ ax+5y+3z &=& 2 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z &=& 2 \\ ax+ay+2z &=& a+2 \\ -ax-y+az &=& a^2+a-2 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z &=& 1 \\ x+ay+z &=& a \\ x+y+az &=& a^2 \end{array}\right. , \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+3y-az &=& 4 \\ -ax+y+az &=& 0 \\ -x+2ay &=& a+2 \\ 2x-y-2z &=& 0 \end{array}\right. .$$