Asignatura: Geometría II
Grado en Matemáticas
Tema 3. Espacios vectoriales euclídeos

Prof. Rafael López Camino
Universidad de Granada

29 de mayo de 2015

Índice

1. Métricas euclídeas

Definición 1.1 *Una métrica euclídea en un espacio vectorial es una métrica definida positiva.*

Por tanto:

1. Es equivalente a decir que la signatura es $\sigma(g) = (n, 0)$.
2. Es equivalente a que los determinantes encajados en una expresión matricial suya son todos positivos.
3. Es una métrica no degenerada.
4. Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial, $V = U \oplus U^\perp$.
5. $dim(U^\perp) = dim(V) - dim(U)$.
6. Una base ortonormal es aquella base donde $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.
7. Si B y B' son bases ortonormales, entonces la matriz de cambio de base P satisface $I = P^t I P$, es decir, $P^t P = I$.

Una matriz ortogonal A es aquella matriz cuadrada que satisface $A^t A = I$, y por tanto, también $AA^t = I$. En particular, es regular. El conjunto de todas las matrices ortogonales, que denotamos por $O(n)$, es un grupo para la multiplicación de matrices.

Proposición 1.2 *El espacio de matrices ortogonales* $(O(n), \cdot)$ *es un grupo. El conjunto* $SO(n) = \{A \in O(n); det(A) = 1\}$ *se llama subgrupo especial ortogonal y también es un grupo.*

Sabemos cómo construir bases ortonormales. Para ello, hallamos primero una base ortogonal, es decir, una base donde la métrica diagonaliza, y luego, dividimos cada vector v de dicha base por $\sqrt{g(v,v)}$. Si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base y $A = M_B(g)$ es la expresión matricial de g en dicha base, sabemos que los elementos de la diagonal principal son positivos, y lo mismo sucede después de hacer transformaciones elementales. Llamamos *base de Gram-Schmidt* obtenida a partir de B a la base que se deduce de las siguientes operaciones: se hace ceros en la primera columna y fila mediante operaciones de la forma $F_{i1}(-a_{i1}/a_{11})$; se hace ceros en la segunda columna y fila mediante operaciones de la forma $F_{i2}(-a'_{i2}/a'_{11})$; y así sucesivamente. A la base resultante, después de hacerla conjugada la denotamos por $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Sea

$$U_k =< e'_1, \ldots, e'_k >, \ \ B'_k = \{e'_1, \ldots, e'_k\}.$$

La base de Gram-Schmidt tiene las dos siguientes propiedades:

1. $U_k =< e'_1, \ldots, e'_k >=< e_1, \ldots, e_k >$, para $1 \leq k \leq n$.
2. Si $A_k = M(1_{U_k}, B'_k, B_k)$, entonces $det(A_k) = 1$.

También podemos hallar la base ortogonal correspondiente a la base de Gram-Schmidt mediante el siguiente proceso recurrente.

1. Sea $\bar{e}_1 = e_1$.
2. Se halla $\bar{e}_2 = e_2 + \lambda \bar{e}_1$ de manera que $g(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$. Con esta condición obtenemos

$$0 = g(e_2, \bar{e}_1) + \lambda g(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \Rightarrow \lambda = -\frac{g(e_2, \bar{e}_1)}{g(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}.$$

3. Se halla $\bar{e}_3 = e_3 + \lambda \bar{e}_2 + \mu \bar{e}_1$ de manera que

$$g(\bar{e}_3, \bar{e}_2) = G(\bar{e}_3, \bar{e}_1) = 0.$$

   De aquí,

$$\lambda = -\frac{g(e_3, \bar{e}_1)}{g(\bar{e}_1, \bar{e}_1)}, \mu = -\frac{g(e_3, \bar{e}_2)}{g(\bar{e}_2, \bar{e}_2)}.$$

y así se va siguiendo el proceso.

Definición 1.3 *Sea (V, g) un espacio euclídeo. Se define el módulo de un vector $v \in V$ como*

$$|v| = \sqrt{g(v, v)}.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. $|v| = 0$ sii $v = 0$.
2. $\lambda v| = |\lambda||v|$.

3. $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2g(u,v)$.
4. $|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ sii $u \perp v$.

Teorema 1.4 (desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si $u, v \in V$, entonces*

$$|g(u,v)| \leq |u||v|$$

y la igualdad se da sii $\{u,v\}$ son linealmente independientes.

Demostración. Si uno de los vectores es 0, es evidente el resultado. Supongamos que no son cero. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, se considera

$$|u + \lambda v|^2 \geq 0.$$

Entonces $|u|^2 + \lambda^2 |v|^2 + 2\lambda g(u,v) \geq 0$. Por tanto, el discriminante de este polinomio de segundo grado debe de ser no positivo, obteniendo la desigualdad.

Si son linealmente dependientes u y v, se da la igualdad. Si se da la igualdad, se da la igualdad en las desigualdades anteriores, en particular, $u + \lambda v = 0$ para cierto λ, probando que son linealmente dependientes.

Si u y v no son ceros, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede escribir como

$$-1 \leq \frac{g(u,v)}{|u||v|} \leq 1.$$

Como la aplicación coseno es biyectiva de $[0,\pi]$ en $[-1,1]$, el número del centro es coseno de un *único* número $\theta \in [0,\pi]$.

Definición 1.5 *Si $u, v \in V$ y no son ceros, se define el ángulo entre u y v como $\angle(u,v) \in [0,\pi]$ tal que*

$$\cos\angle(u,v) = \frac{g(u,v)}{|u||v|}.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. $\angle(u,v) = \angle(v,u)$.
2. $\angle(u,v) \in \{0,\pi\}$ sii $\{u,v\}$ son linealmente dependientes.
3. $g(u,v) = |u||v|\cos\angle(u,v)$.
4. $u \perp v$ sii $\angle(u,v) = \pi/2$.

2. Simetrías ortogonales y proyecciones ortogonales

Sea U un subespacio vectorial de un espacio euclídeo (V,g). Sabemos entonces que $V = U \oplus U^{\perp}$ y por tanto, todo vector $v \in V$ se escribe de forma única como suma de uno de U y otro de $U^{\perp}$: $v = u + w$.

Definición 2.1 *Se llama simetría ortogonal respecto de U a la aplicación*

$$S : V \to V, \;\; S(v) = u - w.$$

Proposición 2.2 *Con la notación anterior,*

1. *S es una aplicación lineal.*
2. $S \circ s = 1_V$.
3. *S es un isomorfismo.*
4. $S_{|U} = 1_U$.
5. $S_{|U^{\perp}} = -1_{U^{\perp}}$.
6. *S es diagonalizable, con valores propios* 1 *y* -1 *y* $V_1 = U$*,* $V_{-1} = U^{\perp}$.

Definición 2.3 *Se llama proyección ortogonal sobre U a la aplicación*

$$\pi : V \to V, \;\; \pi(v) = u.$$

Proposición 2.4 *Con la notación anterior,*

1. π *es una aplicación lineal.*
2. $\pi \circ \pi = \pi$.
3. $Ker(\pi) = U^{\perp}$ *e* $Im(\pi) = U$. .
4. $\pi_{|U} = 1_U$.
5. π *es diagonalizable, con valores propios* 1 *y* 0 *y* $V_1 = U$*,* $V_0 = U^{\perp}$.

Si ahora denotamos con subíndices el subespacio correspondiente, tenemos:

Proposición 2.5 1. $S_U \circ S_{U^{\perp}} = -1_V$.

2. $\pi_U \circ \pi_{U^{\perp}} = 0$.

3. Endomorfismo autoadjunto

Definición 3.1 *Un endomorfismo $f:(V,g)\to(V,g)$ es un espacio euclídeo $(V;g)$ se dice que es autoadjunto si:*

$$g(f(u),v)=g(u,f(v)),\ \ \forall u,v\in V.$$

Para una base B de V y si denotamos $A=M(f,B)$ y $G=M_B(g)$, la igualdad anterior se escribe

$$(AX)^tGY=X^tGAY\Leftrightarrow X^tA^tGY=X^tGAY,\ \ u=AX,v=AY.$$

Por tanto, $A^tG=GA$. En particular, si B es ortonormal, $A=A^t$.

Proposición 3.2 *Sea un endomorfismo $f:(V,g)\to(V,g)$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *f es autoadjunto.*
2. *$A^tG=GA$ para cualquier base.*
3. *La matriz GA es simétrica para cualquier base.*
4. *$A^t=A$ para cualquier base ortonormal.*

Esto nos permite construir muchos endomorfismos autoadjuntos del siguiente modo: sea A una matriz simétrica de orden n. Cogemos un espacio euclídeo (V,g) de dimensión n y B una base ortonormal. Entonces el endomorfismo dado por

$$f(X)=AX$$

donde X representa coordenadas respecto de B, es un endomorfismo autoadjunto. En verdad, es un si y sólo si en el siguiente sentido.

Proposición 3.3 *Sea (V,g) un espacio euclídeo de dimensión n y B una base ortonormal. Si $S_n(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las matrices simétricas, la aplicación*

$$\textit{Endomorfismos autoadjuntos de } (V,g)\to S_n(\mathbb{R})$$

$$f\mapsto M(f,B)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Proposición 3.4 *Sea $f : (V, g) \to (V, g)$ es un endomorfismo autoadjunto.*

1. *Si $U \subset V$ un espacio vectorial tal que $f(U) \subset U$, entonces $f(U^\perp) \subset U^\perp$.*
2. *Si λ, μ son dos valores propios distintos de f, entonces $V_\lambda \perp V_\mu$.*

Demostración.

1. Trivial.
2. Si $u \in V_\lambda$ y $v \in V_\mu$, entonces $f(u) = \lambda u$ y $f(v) = \mu v$. Por tanto
$$g(f(u), v) = g(u, f(v)) \Rightarrow g(\lambda u, v) = g(u, \mu v) \Rightarrow (\lambda - \mu) g(u, v) = 0,$$
obteniendo el resultado.

La importancia de los endomorfismos autoadjuntos se encuentra en el siguiente

Teorema 3.5 *Todo endomorfismo autoadjunto es diagonalizable. Además, es posible encontrar una base ortonormal de vectores propios.*

En términos de matrices, el enunciado anterior es equivalente a:

Teorema 3.6 *Toda matriz simétrica es diagonalizable. Además, es posible diagonalizar a la vez por semejanzas y congruencias, es decir, si $A \in S_n(\mathbb{R})$, existe $P \in O(n)$ tal que $P^t AP$ es una matriz diagonal.*

La clave en la demostración radica en probar que toda matriz simétrica real tiene tantos valores propios reales como indica su orden.

Lema 3.7 *Sea $A \in S_n(\mathbb{R})$. Entonces A tiene n valores propios.*

Demostración. Sea $P_A(\lambda)$ el polinomio característico de A. El teorema fundamental del Álgebra dice que dicho polinomio tiene n raíces complejas. Además, como los coeficientes del polinomio son reales, si λ es una raíz, su conjugada también lo es. Sea $\lambda = a + ib$ una raíz de $P_A(\lambda)$. Sea $C = (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda} I)$, donde $\bar{\lambda} = a - ib$ es el conjugado de λ. Sabemos que el determinante de C es 0. Además, desarrollando, y usando que A es simétrica obtenemos:
$$C = (A - aI)^t (A - aI) + b^2 I.$$

Como el determinante de C es cero, existe $X \neq 0$ tal que $CX = 0$. Multiplicando a izquierda y derecha por X^t y X, tenemos

$$X^t(A-aI)^t(A-aI)X + b^2X^tX = 0.$$

Observemos que si $X = (x_1,\ldots,x_n)$, entonces $X^tX = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Por tanto, y llamando $Y = (A-aI)$, la igualdad anterior se escribe como

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 + b^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0.$$

Como $X \neq 0$, entonces $b = 0$, probando que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. [del teorema 3.6 Tomamos $U = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_m}$, donde $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ son los valores propios de f. Falta por probar que $V = U$. En caso contrario, $V = U \oplus U^\perp$, con $dim(U^\perp) \geq 1$. Es evidente que $f(U) \subset U$, luego $f(U^\perp) \subset U^\perp$ por ser f autoadjunto. Entonces $f : U^\perp \to U^\perp$ es un endomorfismo autoajunto de U^t, en particular, tiene valores propios por el lema anterior: contradicción, ya que todos los vectores propios de f ya estaban en U.

Además, la demostración nos da un método para hallar la base ortonormal. Vamos tomando una base de cada subespacio propio, B_i. Entonces $B = B_1 \cup \ldots \cup B_m$ es una base de vectores propios de V. Además los vectores de B_i son perpendiculares a los de B_j. Ahora vamos cambiando cada base B_i por una base B_i' de vectores ortonormales (Gram-Schmidt). Luego $B' = B_1' \cup \ldots \cup B_m'$ es la base buscada.

Pongamos dos ejemplos:

1. Diagonalizamos por semejanzas y congruencias la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Como A es simétrica, sabemos que lo que hay que hacer primero es hallar una base de vectores propios. El polinomio característico es $-\lambda^3 + 2\lambda^2$ y los valores propios son $\lambda = 2$ y $\lambda = 0$, que es doble. Aunque podríamos pensar si se satisface que la multiplicidad geométrica de $\lambda = 0$ coincide con su algebraica, el hecho de que A sea simétrica nos asegura que coinciden. Hallamos los subespacios propios: $V_2 =< (0,0,1) >$ y $V_0 =< (1,1,0),(1,0,0) >$. Hallamos bases ortonormales de cada uno de los subespacios propios. En este caso, la base de V_2 se deja como está, y la de V_0, es cambiarla a $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$. Por tanto $P^tAP = D$, donde $P \in O(3)$ y

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Consideramos $(\mathbb{R}^2, g)$ el espacio euclídeo donde g es

$$M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definimos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Probamos que f es autoadjunto y hallamos una base donde diagonaliza.

Observemos, en primer lugar, que $M(f, B_u)$ no es simétrica: pero también que B_u no es una base ortonormal. Para probar que f es autoadjunto hay que probar que la matriz

$$M_{B_u}(g)M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

es simétrica. Pero

$$M_{B_u}(g)M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la base ortonormal, diagonalizamos $M(f, B_u)$ como siempre se ha hecho: los valores propios de $P(\lambda)$ son $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$ (probando que es diagonalizable, aunque ya se sabía esto de antemano). Hallamos base de los subespacios propios:

$$V_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} =< (-2,1) > .$$

Para hallar V_2 se haría de la manera estándard, pero aquí usamos que $V_5 \perp V_0$, y por tanto, $V_5 = (V_0)^\perp$. Entonces $(x,y) \in V_2$ sii

$$(x \ \ y) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

obteniendo $x = 0$. Por tanto, $V_2 =< (0,1) >$. Entonces una base donde diagonaliza f es $\{(-2,1),(0,1)\}$ y ahora hallamos una ortonormal. Como hay dos vectores en la base que son perpendiculares al pertenecer a diferentes subespacios propios, entonces sólo hay que dividir cada uno por su módulo:

$$(-2 \ \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}) = 6, \ (0 \ \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2.$$

Por tanto la base que se pide es $\{(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}), (0, 1/\sqrt{2})\}$.

Nos preguntamos si un endomorfismo definido en un espacio vectorial es autoadjunto para alguna métrica del mismo. Concretamente, sea $f: V \to V$ un endomorfismo en un espacio vectorial V, el cual no tiene en principio una estructura de espacio métrico. La pregunta anterior se formula del siguiente modo: ¿existe una métrica g en V tal que $f: (V,g) \to (V,g)$ sea autoadjunto? Si fuera así, es decir, es condición necesaria, el endomorfismo sería diagonalizable. Veamos que el recíproco es inmediato.

Teorema 3.8 *Sea $f: V \to V$ un endomorfismo. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *f es diagonalizable.*
2. *Existe una métrica g tal que $f: (V,g) \to (V,g)$ es autoadjunto.*

Demostración. Sólo hay que probar (1)$\Rightarrow$ (2). Sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de vectores propios. Se define g de manera que B es una base ortonormal, es decir,

$$M_B(g) = I.$$

Para probar que es autoadjunto, y ya que B es una base ortonormal, es suficiente con ver que $A = M(f,B)$ es una matriz simétrica. Pero dicha matriz A es diagonal, luego simétrica.

4. Isometrías lineales

Definición 4.1 *Una isometría $f: (V,g) \to (V',g')$ entre dos espacios euclídeos es una aplicación biyectiva que es lineal y*

$$g'(f(u),f(v)) = g(u,v), \ \ \forall u,v \in V.$$

Por tanto, toda isometría es un isomorfismo. Las isometrías lineales preservan todas las propiedades métricas, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 4.2 *Sea $f: (V,g) \to (V',g')$ una isometría.*

1. *f preserva módulos: $|f(u)| = |u|$.*
2. *f preserva ángulos: $\angle(u,v) = \angle(f(u),f(v))$.*

3. *f preserva la ortogonalidad: si $u \perp v$, entonces $f(u) \perp f(v)$.*

4. *f preserva los subespacios ortogonales: si $U \subset V$, entonces $f(U)^\perp = f(U^\perp)$.*

5. *f preserva bases ortogonales: si B es una base ortogonal de (V,g), entonces $f(B)$ es una base ortogonal de $(V'g')$.*

6. *f preserva bases ortonormales: si B es una base ortonormal de (V,g), entonces $f(B)$ es una base ortonormal de $(V'g')$.*

También tenemos las siguientes caracterizaciones:

Proposición 4.3 *Sea $f : (V,g) \to (V',g')$ un isomorfismo.*

1. *f es una isometría sii f preserva módulos.*

2. *f es una isometría sii f preserva bases ortonormales.*

Un ejemplo destacado de isometrías apareció con las simetría ortogonales. Efectivamente, si U es un subespacio de un espacio euclídeo, y escribimos $V = U \oplus U^\perp$, entonces la simetría ortogonal respecto de U era la aplicación

$$S_U : V \to V, \ \ S(u+w) = u - w.$$

Recordemos también que S_U es diagonalizable, siendo $V_1 = U$ y $V_{-1} = U^\perp$. En el caso que U sea un hiperplano, a tal simetría la llamaremos *reflexión respecto de U*.

Sea una isometría f, B y B' bases ortonormales de V y V' respectivalmente. Como $f(B)$ es una base ortonormal de V', la matriz de cambio de base es una base ortogonal, es decir, $A = M(1_{V'}, f(B), B') \in O(n)$. Pero observemos que $A = M(f,B,B')$. Del mismo modo se tiene el recíproco, es decir,

Teorema 4.4 *Sea $f : (V,g) \to (V',g')$ un isomorfismo. Son equivalentes:*

1. *f es una isometría.*

2. *$M(f,B,B') \in O(n)$ para bases ortonormales B y B' de V y V' respectivamente.*

Esto permite estableces un isomorfismo: fijando una base ortonormal de (V,g),

$$\text{Isometrías de } (V,g) \text{ en } (V,g) \to O(n)$$

$$f \longmapsto M(f,B).$$

Por tanto el conjunto de todas las isometrías de un espacio euclídeo (V,g) en sí mismo constituye un grupo para la composición. De manera sencilla, se tiene también que la composición de isometrías es una isometría y la inversa de una isometría también lo es (no estamos considerando aquí endomorfismos).

Proposición 4.5 *Sea $f:(V,g)\to(V,g)$ una isometría. Entonces:*

1. *$det(F)=\pm 1$.*
2. *Si λ es un valor propio, entonces $\lambda=\pm 1$.*
3. *$V_1 \perp V_{-1}$.*
4. *Si U es un subespacio vectorial tal que $f(U)\subset U$, entonces $f(U^\perp)\subset U^\perp$.*

Demostración.

1. Es consecuencia de que $M(f,B)\in O(n)$.
2. Si $f(u)=\lambda u$, entonces $g(f(u),f(u))=g(u,u)$, es decir, $\lambda^2 g(u,u=g(u,u)$, luego $\lambda^1=1$.
3. Si $u\in V_1$ y $v\in V_{-1}$, entonces
$$g(u,v)=g(f(u),f(v))=g(1\cdot u,-1\cdot v)=-g(u,v)\Rightarrow g(u,v)=0.$$
Si $v\in U^\perp$, entonces
$$g(f(v),u)=g(f(v),f(f^{-1}(u)))=g(v,f^{-1}(u))=0.$$

5. Formas canónicas de isometrías en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Vamos a clasificar todas las isometrías de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con la métrica usual. Esto lo podemos (y lo hacemos) en dimensiones arbitrarias y para cualquier espacio vectorial euclídeo, pero al final particularizaremos a los dos casos anteriores. Sea (V,g) un espacio euclídeo de dimensión n y f una isometría del espacio en sí mismo.

Una primera clasificación, aunque no determina de forma unívoca la isometría, atiende al determinante: si es 1 se llama rotación, y si es -1, reflexión. Además:

Proposición 5.1 *Respecto de bases ortonormales, una isometría es:*

1. *Una rotación sii la matriz asociada es de $SO(n)$.*
2. *Una reflexión sii la matriz asociada es de $O(n) - SO(n)$.*

Tomamos una base ortonormal B y sea $A = M(f,B)$. Sabemos que $A \in O(n)$. Luego lo que nos estamos preguntando es cómo son las matrices ortogonales de orden n. Denotamos por V_1 y V_{-1} los subespacios propios de f y escribamos $V = V_1 \oplus V_{-1} \oplus U$. Sabemos que $f : U \to U$ y que no tiene valores propios. En particular, la dimensión de U es *par*, ya que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz. Nos paramos, y estudiamos el caso $n = 2$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Multiplicando $A^t A = I$, tenemos las siguientes ecuaciones

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

$$ab + cd = 0.$$

De las dos primeras, existe $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$ tal que

$$a = \cos\theta, c = \sin\theta \quad b = \cos\varphi,\ d = \sin\varphi.$$

Y de la tercera, $\cos(\theta - \varphi) = 0$. Por tanto, $\theta - \varphi = \pi/2$ o $\theta - \varphi = 3\pi/2$. Concluimos entonces que A es uno de los dos siguientes tipos:

1. $$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Puede uno darse cuenta, hallando los valores propios que:

1. Las matrices del tipo (1) son diagonalizables con $dim(V_1) = dim(V_{-1} = 1$. Además

$$V_1 =< (\sin\theta, 1 - \cos\theta) > .$$

Respecto de una base $B = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_{-1}$, la matriz de la isometría es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto es una *simetría respecto de una recta*, o *reflexión respecto de una recta*.

2. Si $\theta = 0$, es la matriz identidad. Si $\theta = \pi$, es $-I$ y se llama *simetría central*. En cualquier otro caso, la matriz no es diagonalizables y se llama *giro de ángulo* θ o *rotación de ángulo* θ.

Teorema 5.2 *Las isometrías en un espacio euclídeo de dimensión* 2 *se clasifican del siguiente modo:*

1. *La identidad.*
2. *Simetría central.*
3. *Reflexión respecto de una recta.*
4. *Giro o rotación.*

Pasamos ahora al caso $n = 3$. Entonces A tiene al menos un valor propio. Además, si tiene otro, tiene 3. Distingamos las dos posibilidades.

1. Si hay tres valores propios, estos pueden ser: 3 valores 1, y es la identidad; 3 valores -1, y es la menos identidad; 2 valores 1 o 1 valor 1, teniendo una simetría respecto de un plano o una simetría respecto de una recta.

2. Si sólo hay un valores propio, sea U el subespacio propio. Entonces $f(U) = U$, luego $f : U^\perp \to U^\perp$ es una isometría sin valores propios (salvo que $f_{|U^\perp}$ sea la identidad o menos la identidad. Atendiendo a la clasificación en el caso $n = 2$, debe ser un giro en $U^\perp$.

Teorema 5.3 *Las isometrías en un espacio euclídeo de dimensión* 3 *se clasifican del siguiente modo:*

1. a) *La identidad.*
   b) *Simetría central.*
   c) *Reflexión respecto de un plano.*

d) Simetría respecto de una recta, o simetría axial.

2. *a) Giro o rotación respecto de una recta.*

   b) Reflexión respecto de un plano U seguido de un giro respecto de $U^{\perp}$.

En cualquier de los dos casos de dimensiones, la isometría queda determinada por el conocimiento de los subespacios V_1 y V_{-1}.

Isometrías de V^2		
Nombre	dim (V_1)	dim (V_{-1})
Identidad	2	0
Reflexión respecto de una recta	1	1
Simetría central	0	2
Giro	0	0

Cuadro 1: Isometrías de un espacio euclídeo de dimensión 2.

Isometrías de V^3			
Nombre	dim (V_1)	dim (V_{-1})	dim $(V_1 \oplus V_{-1})^{\perp}$
Identidad	3	0	0
Reflexión respecto de un plano	2	1	0
Simetría axial	1	2	0
Simetría central	0	3	0
Giro respecto de una recta	1	0	1
Reflexión + giro	0	1	1

Cuadro 2: Isometrías de un espacio euclídeo de dimensión 3.

Hacemos dos ejemplos ilustrativos:

1. Se considera el endomorfismo de $r\mathbb{R}^3$ dado por

$$M(f,B_u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

   Probar que es una isometría, hallar la forma canónica y clasificarla.

   Es fácil darse cuenta que $M(f,B_u)^t M(f,B-u) = I$, luego al ser B_u una base ortonormal, nos dice que f es una isometría. Hallamos ahora el polinomio característico, el cual es, $\lambda - 1)(-3\lambda^2 - 4\lambda - 3)$. Por tanto ya sabemos que es un giro respecto de $L = V_1$. Este subespacio es $Ker(M(f, B-u) - 1 \cdot I) =< (1,2,0) >$. Hallamos $(V_1)^{\perp}$, el cual tiene ecuación $x + 2y = 0$: $(V_1)^{\perp} =< (0,0,1),(2,-1,0) >$. Respecto de $B' = \{(0,0,1),(2,-1,0)\} = \{e_1, e_2\}$,

$$f(e_1) = -\frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2, \ \ f(e_2) = -\frac{5}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2.$$

Para hallar el ángulo, cambiamos a una base ortonormal: $B'' = \{v_1 = e_1, v_2 = e_2/\sqrt{5}\}$. Entonces

$$f(v_1) = -\frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}\sqrt{5}v_2, \ \ f(v_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\frac{5}{3}v_1 - \sqrt{5}\frac{2}{3}v_2).$$

Entonces

$$M(f_{|(V_1)^{\perp}}) \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ y $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$. La forma canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

respecto de la base $\{(1,2,0)\sqrt{5}, (0,0,1), (2,-1,0)/\sqrt{5}\}$.

2. Hallar la matriz respecto de la base usual de un giro en $\mathbb{R}^3$ de ángulo $\pi/2$ respecto de la recta $L =< (1,0,1 >$.

   Hallamos una base de L, $L =< (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) >$ y otra de

$$L^{\perp} =< (0,1,0),(1,0,-1) >=< (0,1,0),(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2}) > .$$

   Respecto de

$$B = \{(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(0,1,0),(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})\},$$

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ 0 & \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces $M(f, B_u) = PM(f,B)P^t$, donde $P^t = M(1_{\mathbb{R}^3}, B_u, B)$. Así

$$\begin{aligned} M(f,B_u) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/2 & -\sin\pi/2 \\ 0 & \sin\pi/2 & \cos\pi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para resumir, podemos dar un *método para clasificar isometrías en un espacio de dimensión* 3. De las formas canónicas que hay de una isometría se deduce que si $det(A) = \varepsilon$ (con $\varepsilon = 1, -,1$), entonces ε es un valor propio de la isometría. Los pasos a seguir serían:

1. Hallar la expresión matricial A de la isometría respecto de una base (no hace falta que sea ortonormal).

2. Hallar el determinante de A.

3. *a*) Caso $|A| = 1$. Hallamos la dimensión de V_{-1}.
      1) $dim(V_{-1}) = 0$, es decir, -1 no es valor propio. Giro respecto de una recta o identidad.
      2) $dim(V_{-1}) = 1$. No puede darse.
      3) $dim(V_{-1}) = 2$. Simetría axial respecto de V_1.
      4) $dim(V_{-1}) = 3$. No puede darse.

   b) Caso $|A| = -1$. Hallamos la dimensión de V_1.
      1) $dim(V_1) = 0$, es decir, 1 no es valor propio. Simetría central o la opuesta de la identidad.
      2) $dim(V_1) = 1$. No puede darse.
      3) $dim(V_1) = 2$. Reflexión respecto de V_1.
      4) $dim(V_1) = 3$. No puede darse.

4. Si se quiere calcular los subespacios de las simetrías, giros, reflexiones, etc, habría que hallar explícitamente los subespacios V_1 y V_{-1}.

5. Supongamos que la isometría tiene determinante 1. Entonces es un giro o una simetría axial. Hallamos el subespacio ortogonal $V_1^{\perp}$. Si es una simetría axial, basta con tomar un vector de $V_1^{\perp}$, hallar su imagen y ver si es el opuesto. Si lo es, entonces es una simetría axial. Si no, es un giro.

6. Supongamos que la isometría tiene determinante -1. Entonces es un giro seguido de reflexión o una reflexión respecto de un plano. Hallamos el subespacio ortogonal $V_{-1}^{\perp}$. Si es una reflexión, basta con tomar un vector de $V_{-1}^{\perp}$, hallar su imagen y ver si es el mismo. Si lo es, entonces es una reflexión. Si no, es un giro seguido de una reflexión.

7. Para hallar el ángulo de un giro o de un giro seguido de una reflexión, hay que hallar la expresión matricial en el subespacio ortogonal del eje. Por ejemplo, si es un giro respecto de L, entonces hay que tomar $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal donde $L = < e_1 >$ (se puede relajar la condición con que e_1 no sea de módulo 1).

Ahora, si $U =< B' >$, $B' = \{e_2, e_3\}$ hay que calcular la $M_{f_{|U}}(B')$. En verdad, sólo la imagen de e_2, es decir, $f(e_2)$, que será de la forma $f(e_2) = \cos\theta e_2 + \sin\theta e_3$. O dicho de otra manera, θ es el único número en $[0, 2\pi)$ con la propiedad:

$$g(f(e_2), e_2) = \cos\theta, \ \ g(f(e_2), e_3) = \sin\theta.$$

6. Clasificación de isometrías en dimensión arbitraria

Siguiendo la idea de la sección anterior, y para una isometría dada, escribimos $U = (V_1 \oplus V_{-1})$. Entonces $f(U) \subset U$ y así $f(U^\perp) \subset U^\perp$, con $\dim(U^\perp) = 2k$. Restringimos f a $U^\perp$, donde sabemos que no hay vectores propios. Probamos las siguientes propiedades:

1. La aplicación $h := f + f^{-1} : U^\perp \to U^\perp$ es autoadjunta.

   Demostración. Evidente.

2. Existe $e \in U^\perp$ tal que $h(e) = \lambda e$, es decir, $f^2(e) = \lambda f(e) - e$.

3. Sea $P_1 =< e, f(e) >$. Entonces P_1 es un plano vectorial y es invariante por f.

   Demostración. Si $ae + bf(e) = 0$, entonces $b = 0$, pues en caso contrario, e es un valor propio de f. Y si $b = 0$, entonces $a = 0$.

   Veamos ahora que $f(P_1) = P_1$. Por un lado, $f(e) \in P_1$. Por otro, $f(f(e)) = \lambda f(e) - e \in P_1$.

4. Como $f_{|P_1}$ es una isometría y no tiene valores propios, entonces es un giro, es decir, de la forma
$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}.$$

5. Ahora en $U^\perp$, tomamos $U^\perp = P_1 \oplus P_1^\perp$, y hacemos el mismo razonamiento, volviendo a encontrar un plano vectorial donde la restricción de f es un giro.

Teorema 6.1 *Sea $f : (V, g) \to (V; g)$ una isometría. Entonces para cierta base ortonormal*

B de V, la expresión matricial de f es

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & G_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & G_k \end{pmatrix}, \quad G_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

donde $\theta_i \in (0,2\pi) - \{\pi\}$. A esta expresión matricial se le llama forma canónica.

Observemos que para una simetría ortogonal, es decir, una isometría donde $V = V_1 \oplus V_{-1}$, se tiene que si se toma una base B_1 de U y otra de $U^{\oplus}$, *no necesariamente ortonormal*, entonces la expresión matricial de la simetría respecto de B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

De la demostración del teorema 6.1, concluimos:

Corolario 6.2 *Sea $f : (V,g) \to (V,g)$ una isometría. Si B es una base ortonormal, la matriz*

$$M(f + f^{-1}, B)$$

es simétrica.