Asignatura: Geometría II
Grado en Matemáticas
Tema 2. Formas bilineales y formas cuadráticas

Prof. Rafael López Camino
Universidad de Granada

9 de abril de 2015

Índice

En este tema vamos a dar los primeros pasos para el estudio de las métricas euclídeas que se hará en profundidad en el tema siguiente. El objetivo de este tema es familiarizarnos con aplicaciones que tienen propiedades comunes con la métrica euclídea. Introduciremos el concepto de forma bilineal y forma cuadrática y realizaremos una clasificación satisfactoria de ellas. Para ello usaremos ciertas técnicas de diagonalización para culminar en el teorema de Sylvester.

1. Forma bilineal

El primer ejemplo de forma bilineal y que nos va a motivar su definición es la métrica euclídea. Recordemos que en el plano $\mathbb{R}^2$, la métrica euclídea está definida por

$$g_E(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2, \ \ x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2).$$

la cual permite manejar conceptos como distancias, módulos y ángulos. Así, el módulo de un vector x es

$$|x| = \sqrt{g_E(x,x)}$$

y el ángulo θ entre dos vectores no nulos $x,y \in \mathbb{R}^2$ es aquél cuyo coseno es

$$\cos\theta = \frac{g_E(x,y)}{|x||y|}.$$

La métrica euclídea es una aplicación cuyo dominio no es $\mathbb{R}^2$, sino el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, concretamente, $g_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y posee diferentes propiedades. Vamos a destacar éstas agrupándolas del siguiente modo. Las primeras tres son las siguientes: si $x,y,z \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

1. $g_E(x+y,z) = g_E(x,z) + g_E(y,z)$.
2. $g_E(x,y+z) = g_E(x,y) + g_E(x,z)$.
3. $g_E(\lambda x,y) = \lambda g_E(x,y) + g_E(x,\lambda y)$.

Una cuarta propiedad, es la simetría de g_E, es decir,

$$g_E(x,y(= g_E(y,x) \qquad \text{simetría}$$

Y por último, una propiedad de 'definida positiva':

$$g(x,x) \geq 0, \ \forall x \in V \text{ y } g(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vamos a tomar otros dos ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^2$, definimos la métrica de Lorentz-Minkowski como

$$g_L(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2, \;\; x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2).$$

   Es evidente que esta aplicación satisface las primeras cuatro propiedades que tiene g_E. Respecto de la última, hay que darse cuenta de que $g((0,1),(0,1)) = -1$, es decir, es negativo. Por otro lado, $g_L((1,1),(1,1)) = 0$, pero $x = (1,1)$ no es el elemento neutro.

2. De nuevo, en $\mathbb{R}^2$ definimos

$$g_(x,y) = x_1y_1, \;\; x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2).$$

   Esta aplicación g satisface también las cuatro primeras propiedades, pero no la última. Así, se tiene $g(x,x) = x_1^2 \geq 0$, pero el vector $x = (0,1)$ satisface $g(x,x) = 0$.

Un último ejemplo nos viene si usamos matrices. En general, "cualquier polinomio de grado dos en n-variables" define aplicaciones con propiedades similares a las que tiene g_E, al menos, las tres primeras. Por ejemplo, sea de nuevo $V = \mathbb{R}^2$ y

$$g(x,y) = x_1y_2 + x_2y_2.$$

Esta aplicación se puede escribir como

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x^tAy, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora la prueba de las tres primeras propiedades es una consecuencia del producto de matrices. Así, para la primera, tenemos

$$g(x+y,z) = (x+y)^tAz = (x^t + y^y)Az = x^tAz + y^tAz = g(x,z) + g(y,z).$$

Está claro que la cuarta propiedad no es cierta, pues $g((1,0),(0,1)) \neq g((0,1),(1,0))$, ni tampoco la quinta propiedad, pues $g((1,0),(1,0)) = 0$.

Definición 1.1 *Una forma bilineal en un espacio vectorial V es una aplicación $g : V \times V \to \mathbb{R}$, con las siguientes propiedades: para todo $u,v,w \in V$, y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos,*

1. $g(u+v,w) = g(u,w) + g(v,w)$.
2. $g(u,v+w) = g(u,v) + g(u,w)$.
3. $g(\lambda u,v) = \lambda g(u,v) + g(u,\lambda u)$.

Cuando tengamos $g(u,v)$, diremos "u por v".

Proposición 1.2 *Sea V un espacio vectorial y g una forma bilineal. Entonces*

1. $g(0,v) = g(v,0) = 0$.
2. $g(-u,v) = -g(u,v) = g(u,-v)$.

Demostración.

1. Tomando $g(0,v) = g(0+0,v) = g(0,v), g(0,v)$, y simplificando, se obtiene $g(0,v) = 0$. Del mismo modo, $g(v,0) = 0$.
2. Para probar que $g(-u,v) = -g(u,v)$, hacemos
$$g(-u,v) + g(u,v) = g(-u+u,v) = g(0,v) = 0.$$

Pongamos algunos ejemplos de formas bilineales.

1. La aplicación bilineal cero, $g = 0$, es decir, $g(u,v) = 0$ para todo $u, v \in V$.
2. Sea g una forma bilineal en V y sea $U \subset V$ un subespacio vectorial. Entonces $g_U : U \times U \to \mathbb{R}$ dado por
$$g_{|U}(u,v) = g(u,v), \;\; u,v \in U,$$
es una forma bilineal en U y se llama la forma bilineal inducida en U.
3. La métrica euclídea en $\mathbb{R}^n$:
$$g_E(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
4. La métrica de Lorentz-Minkowski en $\mathbb{R}^n$:
$$g_L(x,y) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n.$$
5. Sea $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y V un espacio vectorial. Fijamos una base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ en V y se define
$$g(u,v) = x^t A y,$$
donde x e y son las coordenadas de u y v respecto de B, respectivamente, es decir, $u = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$.

El último ejemplo lo podemos ‘extender’ del siguiente modo.

Definición 1.3 *Sea g una forma bilineal en un espacio vectorial V. Si $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V, se llama expresión matricial de g respecto de B a la matriz*

$$M_B(g) = (g(e_i, e_j)).$$

Como consecuencia, si $u, v \in V$, y x, y son las coordenadas respecto de B, entonces

$$g(u,v) = g(\sum x_i e_i, \sum y_i e_i) = \sum_{i,j} x_i y_j g(e_i, e_j) = x^t M_B(g) y.$$

Por tanto:

1. Dos formas bilineales g y g' son iguales si y sólo si $M_B(g) = M_B(g')$.

2. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la forma bilineal $g(x,y) = x^t A y$ definida en $\mathbb{R}^n$ es la que tiene como matriz $M_{B_u}(g) = A$.

Dotamos ahora de estructura de espacio vectorial a las formas bilineales.

2. Ortogonalidad. Subespacio ortogonal

Proposición 2.1 *Sea (V, g) un espacio métrico y $u \in V$. Si $g(u,u) \neq 0$, entonces $V = <u> \oplus <u>^\perp$. Como consecuencia, $dim(<u>^\perp) = dim(V) - 1$.*

Demostración. Veamos las dos propiedades de la suma directa.

1. Probamos que $<u> \cap <u>^\perp = \{0\}$. Sea v en dicha intersección. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda u$ y como $v \in <u>^\perp$, entonces $g(v,u) = 0$. Usando la bilinealidad de g, $\lambda g(u,u) = 0$, y como $g(u,u) \neq 0$, entonces $\lambda = 0$, probando que $v = \lambda u = 0$.

2. Probamos que $V = <u> + <u>^\perp$. Sea $v \in V$. Hay que hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in <u>^\perp$ tal que $v = \lambda u + w$. Si multiplicamos por u en esta igualdad, tenemos que λ tiene que ser
$$\lambda = \frac{g(v,u)}{g(u,u)}.$$

Por tanto, definimos λ como dicho número y definimos $w = v - \lambda u$. Queda por probar que, efectivamente, $w \in < u >^{\perp}$. Para ello es suficiente con que $g(w,u) = 0$ (Prop. xx). Pero es evidente que

$$g(w,u) = g(v,u) - \lambda g(u,u) = g(v,u) - \frac{g(v,u)}{g(u,u)} g(u,u) = 0.$$

Extendemos el resultado anterior del siguiente modo

Teorema 2.2 *Sea (V,g) un espacio no degenerado y $U \subset V$ un subespacio vectorial. Entonces*

$$dim(U^{\perp}) = dim(V) - dim(U).$$

Demostración. Supongamos que $dim(U) = m$ y sea $U =< e_1, \ldots, e_m >$. Extendemos a una base de V: $B = \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n >$ y trabajamos en coordenadas respecto de B. Sea $A = M_B(g)$. Entonces

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \{x \in \mathbb{R}^n : x^t A e_i = 0, 1 \leq i \leq m\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^t A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \ldots, x^t A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots 0 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : a_{11}x_1 + \ldots + a_{n1}x_n = 0, \ldots, a_{1m}x_1 + \ldots + a_{nm}x_n = 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^t \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ya que g es no degenerada, el rango de A es n. Por tanto

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = m.$$

Esto implica que la dimensión de $U^{\perp}$ es $n - m$.

Como consecuencia de este teorema y del hecho de que $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$, se tiene:

Corolario 2.3 *Si U es un subespacio vectorial de un espacio métrico (V,g) no degenerado, entonces $U = (U^{\perp})^{\perp}$.*

Después del teorema 2.2, uno espera obtener $V = U \oplus U^\perp$. Esto sería así si probamos que $U \cap U^\perp = \{0\}$. Pero ya hemos visto que esto no es cierto, incluso si la métrica es no degenerada. Por ejemplo, para el espacio de Lorentz-Minkowski $(\mathbb{R}^2, g_L)$, si $U =< (1,1) >$, entonces $U^\perp = U$, luego no puede darse $\mathbb{R}^2 = U \oplus U^\perp$. Esto se debe a que aunque $(\mathbb{R}^2, g_L)$ es no degenerado, la métrica inducida en U es degenerada. El resultado satisfactorio nos lo da el siguiente teorema:

Teorema 2.4 *Sea un espacio métrico no degenerado (V,g) y $U \subset V$ un subespacio vectorial. Son equivalente los siguientes enunciados:*

1. $V = U \oplus U^\perp$.
2. *el subespacio U es no degenerado.*

Como consecuencia, U es no degenerado si y sólo si $U^\perp$ es no degenerado.

Demostración. Supongamos que $V = U \oplus U^\perp$. Para probar que U es no degenerado, hay que ver que la métrica inducida en U es no degenerada, o dicho de otro modo, que $R(g_{|U}) = \{0\}$. Sea pues $v \in R(g_{|U})$. Por un lado $g(v,u) = 0$ para todo $u \in U$, por estar en el radical. Por otro, $g(v,w) = 0$ para todo vector $w \in U^\perp$. Ya que $V = U + U^\perp$, si $p \in V$ y $p = u + w$ es su descomposición como suma de un vector de U y otro de $U^\perp$, entonces

$$g(v,p) = g(v,u) + g(v,w) = 0 + 0 = 0.$$

Esto prueba que $v \in R(g)$, pero como g es no degenerada, $R(g) = \{0\}$ y $v = 0$, como se quería probar.

Supongamos ahora que U es no degenerado. Para probar que $V = U \oplus U^\perp$, veamos que $U \cap U^\perp = \{0\}$ y aplicar posteriormente el teorema 2.2. Si $v \in U \cap U^\perp$, veamos que $v \in R(g)$. Dado $w \in V$, consideramos su descomposición $w = u + w'$, con $u \in U$ y $w' \in U^\perp$. Entonces es inmediato que $g(v,w) = g(v,u) + g(v,w') = 0$. Como $R(g) = \{0\}$ ya que g es no degenerada, entonces $v = 0$, como se quería probar.

La última parte del teorema es consecuencia de que $(U^\perp)^\perp = U$.

Acabamos esta parte, extendiendo bases conjugadas, e intentando extender a nuestro contexto el resultado de espacios vectoriales que decía que dado un conjunto de vectores, se podía extender (=añadir vectores) hasta obtener una base del espacio vectorial.

Teorema 2.5 *Sea un espacio métrico (V,g) y $\{e_1, \ldots, e_m\}$ vectores linealmente independientes tales que $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_i$, donde $\varepsilon_i = 1$ o -1. Entonces existe una base conjugada de (V,g) que contiene a $\{e_1, \ldots, e_m\}$.*

Demostración. Por hipótesis, el subespacio $U =< e_1,\ldots,e_m\}$ es un subespacio no degenerado y $B_U = \{e_1,\ldots,e_m\}$ es una base conjugada. Extendemos B_u hasta conseguir una base B de V. Entonces la expresión matricial de la métrica g respecto de B es

$$M_B(g) = \left(\begin{array}{ccc|c} \varepsilon_1 & & & * \\ & \ddots & & * \\ & & \varepsilon_m & * \\ * & * & * & M_{B'}(g) \end{array}\right),$$

donde $M_{B'}(g_W)$ y $W =< B' >$, con $B' = \{e_{m+1},\ldots,e_n\}$. Se diagonaliza por congruencias. Como la matriz de los ε_i está formada por 1 y -1 (y no por 0), al diagonalizar, los primeros m vectores no cambian. Por tanto, al hacer ceros, y obtener la base conjugada, se obtiene una base de la forma $\{e_1,\ldots,e_m,e'_{m+1},\ldots,e'_n\}$

3. Formas cuadráticas

Hay que una manera 'equivalente' de trabajar con métricas, y es con formas cuadráticas.

Definición 3.1 *Sea (V,g) un espacio métrico. Se llama forma cuadrática asociada a g a la aplicación*

$$\phi_g : V \to \mathbb{R},\ \ \phi_g(u) = g(u,u).$$

Cuando se sobreentienda la métrica g, escribiremos simplemente ϕ. Las siguientes propiedades son inmediatas:

Proposición 3.2 *Si ϕ es la forma cuadrática de una métrica g, entonces*

1. $\phi(\lambda u) = \lambda^2\phi(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\phi(0) = 0$.
3. $\phi(u+v) = \phi(u)+\phi(v)+2g(u,v)$.
4. $g(u,v) = \frac{1}{2}(\phi(u+v)-\phi(u)-\phi(v))$ *(forma polar de g).*

La última propiedad anterior nos dice que la métrica g se conoce a partir de la forma cuadrática. Veamos esto con el siguiente ejemplo.

Sea V un espacio de dimensión n. Sabemos que una matriz simétrica $A \in S_n(\mathbb{R})$ define una métrica en V del siguiente modo[1]: si B es una base, entonces g es la métrica cuya expresión matricial $M_B(g)$ es A, es decir, $g(x,y) = x^t A y$, cuando escribimos los vectores de V en coordenadas respecto de la base B. Hallamos la forma cuadrática de g. Si $u \in V$ tiene coordenadas $x \in \mathbb{R}^n$ respecto de B, es decir, $u = \sum x_i e_i$, entonces

$$\phi(u) = \phi(x) = x^t A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j.$$

Por tanto, toda expresión polinómica de grado 2 y homogénea en sus variables, es decir, no aparecen términos de grado 1 ni de grado 0, determina una forma cuadrática y también una métrica. Así, si consideramos en $\mathbb{R}^3$,

$$\phi(x) = x_1 x_3 - 4 x_2 x_3 + 5 x_3^2$$

entonces ϕ podemos escribirla como

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, la expresión de la métrica g asociada a ϕ es

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y g se expresa como

$$g(x,y) = \frac{1}{2} x_1 y_3 + \frac{1}{2} x_3 y_1 - 2 x_2 y_3 - 2 x_3 y_2 + 5 x_3 y_3.$$

Todas las definiciones que hagamos para una métrica g se traslada a su forma cuadráticas. Así tenemos:

Definición 3.3 *Sea (V,g) un espacio métrico.*

1. *Si B es una base de V, se llama expresión matricial de ϕ respecto de B a $M_B(\phi) = M_B(g)$.*
2. *Se dice que la forma cuadrática ϕ_g es no degenerada (resp. degenerada) si g es una métrica no degenerada (resp. degenerada).*

[1] En verdad, hay tantas métricas como bases, ya que cada base define una métrica diferente.

4. Clasificación de métricas. El teorema de Sylvester

Recordemos que ya hemos clasificado, en cierto sentido, una métrica diciendo que es no degenerada si su radical es trivial, y degenerada, en caso contrario. Esta clasificación divide a las métricas en dos tipos, o dicho de otro modo, dada una métrica g, o es no degenerada, o es degenerada. Vamos a continuar con dar definiciones que, en cierto sentido, clasifican las métricas.

Definición 4.1 *Sea (V,g) un espacio métrico. Se dice que g es:*

1. *semidefinida positiva si $g(v) \geq 0$ para todo $v \in V$.*
2. *semidefinida negativa si $g(v,v) \leq 0$ para todo $v \in V$.*
3. *definida positiva si es semidefinida positiva y $g(v,v) = 0$ sii $v = 0$.*
4. *definida negativa si es semidefinida negativa y $g(v,v) = 0$ sii $v = 0$.*
5. *indefinida si no es ni semidefinida positiva ni semidefinida negativa.*

Nota 4.2 *Las definiciones anteriores se trasladan de manera natural a formas cuadráticas y a matrices simétricas.*

El siguiente resultado es inmediato:

Proposición 4.3 *Sea (V,g) un espacio métrico y $U \subset V$ un subespacio vectorial.*

1. *Si g es semidefinida positiva (resp. semidefinida negativa), entonces $g_{|U}$ es semidefinida positiva (resp. semidefinida negativa).*
2. *Si g es definida positiva (resp. definida negativa), entonces $g_{|U}$ es definida positiva (resp. definida negativa).*

Para mostrar algunos ejemplos, volvemos a considerar expresiones matriciales de métricas. Sea V un espacio vectorial y B una base del mismo. Sabemos que para cada matriz simétrica $A \in S_n(\mathbb{R})$, existe una única métrica g tal que $A = M_B(g)$. Tomamos una matriz A sencilla, por ejemplo, que sea diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces
$$g(x,x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2.$$
Por tanto es evidente que g es:

1. semidefinida positiva sii $a_{ii} \geq 0$ para todo i.
2. semidefinida negativa sii $a_{ii} \leq 0$ para todo i.
3. definida positiva sii $a_{ii} > 0$ para todo i.
4. definida negativa sii $a_{ii} < 0$ para todo i.
5. indefinida si existen i, j tales que $a_{ii} < 0 < a_{jj}$.

Es evidente que el hecho de que la expresión matricial sea diagonal ha sido clave para distinguir la métrica. Por tanto, caben hacerse las siguientes preguntas:

1. ¿existe un método 'fácil' para poder clasificar una métrica?
2. ¿existe una base B tal que $M_B(g)$ sea una matriz diagonal?
3. dada una matriz simétrica $A \in S_n(\mathbb{R})$, ¿es posible diagonalizarla por congruencias?

El objetivo ahora va a ser dar una respuesta a las anteriores preguntas. Anticipamos cuál va a ser. Efectivamente, vamos a probar que existen tales bases, es decir, que toda matriz simétrica se diagonaliza por congruencias. Pero es más, y a la vista del ejemplo anterior, vamos a probar, que cuando se diagonaliza dicha matriz (o dicha métrica, para cierta base), el número de números positivos, negativos y 0, en la diagonal es independiente de la diagonalización que se haga, es decir, independiente de la base que se consiga. Éste es el llamado teorema de Sylvester.

Para la demostración del teorema de Sylvester, hay que probar dos cosas. Primero, la existencia de tales bases, o dicho de otro modo, que una matriz simétrica se puede diagonalizar por congruencias. Por otro, la unidad de la cantidad de los números positivos, negativos y cero que va a haber en la diagonal principal de la matriz diagonal que se consiga.

Para la primera parte, es decir, para la existencia, vamos a hacer dos demostraciones diferentes. Ambas son constructivas, es decir, nos van a dar un método para hallar dicha base. El primer método va a consistir en ir simplificando el problema, al ir reduciendo el orden de la matriz de la métrica. El segundo usará transformaciones elementales que ya se emplearon en la definición del rango de una matriz.

Antes de todo este proceso, podemos probar que el número de ceros es independiente de la base, y como uno sospecha, corresponde con la dimensión del radical de la métrica.

Teorema 4.4 *Sea un espacio métrico (V, g). Si B es una base tal que la métrica diagonaliza con B, es decir,*

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces el número de 0 *en la diagonal principal coincide con la nulidad.*

Demostración. Hallamos el radical de g a partir de $M_B(g)$. Sabemos que el radical, en coordenadas respecto de B, es el núcleo de la matriz $M_B(g)$. O dicho de otro modo, su dimensión, es $n - rg(M_B(g))$. Pero es evidente que dicho rango es el número de números no nulos de la diagonal principal, probando el resultado.

Lema 4.5 *Sea un espacio métrico (V, g) y $U \subset V$ un subespacio vectorial. Si $V = U \oplus R(g)$, entonces $g_{|U}$ es no degenerada.*

Demostración. Sea $u \in U$ tal que $u \in R(g_{|U})$. Entonces u es ortogonal a todos los vectores de U. Pero como también es ortogonal a todos los de $R(g)$, entonces es ortogonal a todos los de V, ya que $V = U + R(g)$. Esto prueba que $u \in R(g)$. Pero como $U \cap R(g) = \{0\}$, entonces $u = 0$, como se quería probar.

Una consecuencia del anterior resultado es la siguiente. Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base de $R(g)$, y ampliamos hasta una base de V: $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Llamamos $U =< e_{m+1}, \ldots, e_n >$ y $B'\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Entonces al hallar la expresión matricial $M_B(g)$, tenemos

$$M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & C \end{array}\right),$$

donde C es una matriz simétrica de orden $n - m$, concretamente, $C = M_{B'}(g_{|U})$. Por el lema anterior, C es una matriz regular.

El recíproco es cierto en el siguiente sentido. Supongamos que $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V de manera que

$$M_B(g) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & C \end{array}\right),$$

donde C es una matriz regular de orden $n-m$. Entonces sabemos que $n(g)=n-rg(M_B(g))$, que aquí es $n-m$. Por tanto, la nulidad es m. También sabemos que el radical es el núcleo de la matriz $M_B(g)$, pero es evidente por la forma que tiene dicha matriz que $R(g)=<e_1,\ldots,e_m>$. Finalmente es evidente que $U=<e_{m+1},\ldots,e_n>$ está en suma directa con $R(g)$ y que la métrica inducida en U es no degenerada, ya que expresión matricial respecto de la base anterior es C.

Teorema 4.6 (existencia: prueba 1) *Sea (V,g) un espacio métrico. Entonces existe una base donde la métrica diagonaliza.*

Demostración. Tomamos $R(g)$ y un subespacio U que esté en suma directa con $R(g)$. El lema anterior nos dice que la métrica $g_{|U}$ es no degenerada. Veamos que existe una base de U donde diagonaliza la métrica $g_{|U}$, y por tanto, al juntar esta base con una base de $R(g)$ y del hecho de que $V=R(g)\oplus U$, se obtiene una base de V donde diagonaliza la métrica g. O dicho de otro modo, basta probar el teorema para espacios métricos no degenerados.

Tomamos un vector $u_1\in U$ tal que $g(u_1,u_1)\neq 0$. Este vector existe, pues en caso contrario, es decir, si para todo $u\in U$, $g(u,u)=0$, entonces para todo $u,v\in U$, tenemos

$$0=g(u+v,u+v)=g(u,u)+g(v,v)+2g(u,v)=0+0+2g(u,v),$$

es decir, $g(u,v)=0$, y la métrica $g_{|U}$ sería nula, y así, degenerada: contradicción.

Una vez que tenemos u_1, sabemos que $U=<u_1>\oplus<u_1>^\perp$, y que $<u_1>^\perp$ es no degenerado. Ahora hacemos el mismo argumento para $<u_1>^\perp$, es decir, si llamamos $U_2=<u_1>^\perp$, entonces U_2 es no degenerado y existe $u_2\in U_2$ tal que $g(u_2,u_2)\neq 0$. Es evidente que $g(u_1,u_2)=0$. De esta manera, hemos reducido el problema a un subespacio de dimensión una menos que la que tenía U. Y así hacemos sucesivamente, hasta finalizar con un subespacio de dimensión 1. Después de este proceso, hemos encontrado n vectores $B'=\{u_1,\ldots,u_n\}$ con la siguientes propiedades:

1. B' es una base: esto es consecuencia que cada nuevo vector que se toma está en un subespacio que está en suma directa con el generador por los anteriores.

2. $g(u_i,u_i)\neq 0$, para todo i.

3. $g(u_i,u_j)=0$ si $i\neq 0$.

Esto no es más que decir que la expresión matricial de $g_{|U}$ respecto de la base B' es diagonal, finalizando la demostración[2]

Realizamos ahora la segunda demostración. Como ya hemos comentado, si $A = M_B(g)$, tenemos que encontrar una matriz regular P tal que $P^tAP = D$ es una matriz diagonal. Dicha matriz P se escribirá como producto de matrices elementales: $P = E_1 \ldots E_k$. Entonces $D = (E_k)^t \ldots (E_1)^t AE_1 \ldots E_k$. Lo que estamos haciendo a la matriz A cuando la multiplicamos por la izquierda por $(E_1)^t$ y por la derecha por E_1 es realizar una transformación elemental por filas, y luego *la misma* por columnas. De esta manera,

> Si queremos diagonalizar po congruencias, toda operación elemental que se haga a la matriz A por filas, hay que hacer la misma por columnas.

Por tanto, la cuestión es: dada una matriz simétrica A ¿existen transformaciones por filas, y por columnas (las mismas) de manera que resulte una matriz diagonal? En tal caso, decimos que A es diagonalizable por congruencias.

Nota 4.7 *Obsérvese que diagonalizar por congruencias no es diagonalizar por semejanzas, a no ser que $P^t = P^{-1}$, lo cual no es cierto en general. Además, diagonalizar por semejanzas era lo mismo que diagonalizar endomorfismos, pero diagonalizar por congruencias es 'diagonalizar' formas bilineales.*

Teorema 4.8 (existencia: prueba 2) *Sea (V, g) un espacio métrico. Entonces existe una base donde la métrica diagonaliza.*

Demostración. Sea B una base cualquiera de V y $A = M_B(g)$ la expresión matricial de g respecto de una base B. Veamos que A diagonaliza por congruencias, y por tanto, la base buscada B' es la que satisface $P = M(I_V, B', B)$, donde P^tAP es una matriz diagonal.

Podemos suponer que la matriz A es no nula, pues en caso contrario, no hay nada que hacer ($g = 0$ y la matriz $D = 0$ para cualquier base).

1. Es posible tomar $a_{11} \neq 0$. Si a_{11} es cero, miramos en el resto de los elementos de la diagonal principal.

[2] Uno podría hacer una demostración más formal, haciendo un argumento de inducción. Concretamente, ya hemos visto que basta probar el resultado para espacios métricos no degenerados. Entonces la demostración se hace por inducción *sobre la dimensión del espacio vectorial*. Para $n = 1$, es evidente. Si suponemos cierto para $n-1$, lo probamos para n. Dado el espacio vectorial U, y con la notación de la demostración, tomamos el vector u_1 y luego el subespacio U_2. Ya que U_2 es no degenerado y tiene dimensión $n-1$, aplicamos inducción sobre U_2, obteniendo el resultado.

a) Caso 1. Supongamos que existe un $a_{ii} \neq 0$. Para simplificar, suponemos que es a_{22}. Vamos a poner a_{22} en el lugar $(1,1)$ mediante transformaciones elementales por congruencias. Sea $b = a_{22}$. Para ello, hacemos F_{12}, y luego C_{12}:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{12}} \begin{pmatrix} b & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Caso que todos los $a_{ii} = 0$. Sea $a_{ij} \neq 0$. Entonces tenemos una submatriz 2×2 del tipo $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Sumamos a la primera fila, la segunda, y lo mismo para las columnas, es decir, hacemos $F_{12}(1)$ y luego $C_{12}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}(1)} \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Una vez que tenemos $a_{11} \neq 0$, usamos este valor como pivote, y hacemos cero en la primera fila y columna, de la manera habitual, pero haciendo las mismas operaciones con las columnas.

3. Ahora pasamos a la matriz de orden uno menos que la anterior, que consiste en quitar la primera fila y la primera columna, y repetir el proceso.

Tanto para el cálculo del rango de una matriz, como para diagonalizar por congruencias, es bueno tener como pivote el número 1. Para ello hay hacer operaciones del tipo $F_i(\lambda)$. Ahora, como hay que hacer la operación tanto por fila que por columna, no basta con dividir por a_{ii}. Lo vemos en los dos siguientes ejemplos significativos. Supongamos que tenemos $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

1. Caso $a > 0$. Hacemos $F_1(1\sqrt{a})$ y luego $C_1(1/\sqrt{a})$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(1/\sqrt{a})} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ b & c \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1(1/\sqrt{a})} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ \frac{b}{\sqrt{a}} & c \end{pmatrix}.$$

2. Caso $a < 0$. Hacemos $F_1(1\sqrt{-a})$ y luego $C_1(1/\sqrt{-a})$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(1/\sqrt{-a})} \begin{pmatrix} -\sqrt{-a} & \frac{b}{\sqrt{-a}} \\ b & c \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1(1/\sqrt{-a})} \begin{pmatrix} -1 & \frac{b}{\sqrt{-a}} \\ \frac{b}{\sqrt{-a}} & c \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia de la demostración, la matriz P que se busca es la obtenida a partir de la matriz identidad I_n mediante las operaciones elementales. Concretamente, sabemos que

$$P^t = (E_k)^t \dots (E_1)^t I_n, \;\; P = I_n E_1 \dots E_k.$$

Por tanto,

> *La matriz P es:*
>
> 1. *la que resulta de hacer a la matriz identidad I_n las mismas operaciones elementales por columnas, o,*
> 2. *la matriz traspuesta que resulta de hacer a la matriz identidad I_n las mismas operaciones elementales por filas.*

Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base donde diagonaliza la métrica. Después de una reordenación de los elementos de la base, colocamos en primer lugar aquellos que pertenecen al radical, luego aquéllos que $g(e_i, e_i) > 0$ y finalmente los que satisface $g(e_i, e_i) < 0$. Antes de probar la unicidad, cambiamos la base por otra, de manera que los elementos de la diagonal sea 0, 1 y -1. Para ello, basta con:

1. Si $g(e_i, e_i) = 0$, se deja el mismo vector.
2. Si $g(e_i, e_i) > 0$, se cambia e_i por $e_i/\sqrt{g(e_i, e_i)}$.
3. Si $g(e_i, e_i) < 0$, se cambia e_i por $e_i/\sqrt{-g(e_i, e_i)}$.

Observemos que este cambio de base por otra no cambia el número de elementos positivos y elementos negativos de la diagonal principal, sino que aquél que era positivo se cambia por 1 y el que era negativo, por -1.

Definición 4.9 *Una base conjugada o base ortonormal B en un espacio métrico es una base donde $M_B(g)$ es una matriz diagonal y los elementos de la diagonal principal son* 0*,* 1*, o* -1.

O dicho de otra manera, una base tal que $g(e_i, e_i)$ es 0 , 1 o -1, y $g(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

Como consecuencia del teorema de existencia anterior, tenemos:

Corolario 4.10 *Todo espacio vectorial métrico tiene bases conjugadas.*

Finalmente, probamos que para una base conjugada, el número de 0, 1 y -1 es invariante, independientemente de la base conjugada que se tome en (V,g).

Teorema 4.11 (unicidad) *Sea (V,g) un espacio vectorial métrico. Entonces el número de 0, 1 y -1 de la diagonal principal de cualquier expresión matricial de g respecto de una base conjugada, es independiente de la base conjugada que se tome en (V,g).*

Demostración. Ya hemos probado que el número de 0 corresponde con la nulidad de la métrica, que es un invariante. Por tanto, podemos suponer desde un principio que el espacio es no degenerado. La demostración es por reducción al absurdo. Sean $B = \{e_1,\ldots,e_n\}$ y $\{v_1,\ldots,v_n\}$ dos bases conjugas, ordenadas para que los primeros elementos de la expresión matricial sean 1 y los últimos -1. Supongamos que el número de 1 correspondiente a la base B es k y para B' es m con $m > k$. Tomos los subespacios vectoriales:

$$U =< e_1,\ldots,e_k >,\ W =< e'_{m+1},\ldots,e'_n > .$$

Veamos que $U \cap W = \{0\}$. Efectivamente, si $v \in U \cap W$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i = \sum_{i=m+1}^{n} b_i e_i.$$

No es difícil darse cuenta que

$$g(v,v) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 = -\sum_{i=m+1}^{n} b_i^2.$$

Esto implica que $a_i = 0$ y $b_i = 0$ para todo i, luego $v = 0$.

Usamos ahora

$$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = k + (n-m).$$

Por un lado $dim(U+W) \leq dim(V) = n$. Por otro, como $m > k$, tenemos $dim(U+W) = k+(n-m) < k+(n-k) = n$. Esta contradicción prueba el resultado.

Una vez probado los teoremas 4.6, 4.8 y 4.11, resumimos todo los anterior en el el teorema de Sylvester.

Teorema 4.12 (Sylvester) *En todo espacio vectorial métrico existen bases conjugadas. Además, el número de 0, 1 y -1 de la diagonal principal de cualquier expresión matricial de g respecto de una base conjugada, es independiente de la base conjugada que se tome en (V,g).*

Recordemos que un enunciado análogo lo podemos hacer para formas cuadráticas y matrices simétricas. Así tenemos:

Corolario 4.13 *Sea $A \in S_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces existe una matriz regular P tal que*

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_p & & \\ & I_k & \\ & & -I_m \end{pmatrix}.$$

Además, el número de cero p, el número de 1, k, y el números de -1, m, es independiente de la matriz regular P que diagonalice por congruencias la matriz A.

Del teorema de Sylvester, podemos dar *ahora* la siguiente definición.

Definición 4.14 *Sea (V,g) un espacio métrico. Se llama:*

1. *signatura de g a $\sigma(g) = (k,m)$, donde k y m es el número de 1 y -1, respectivamente, obtenidos de una base conjugada.*
2. *índice de g al número de -1.*

Por tanto:

1. $rg(g) = k + m$.
2. $n(g) + rg(g) = n(g) + k + m = dim(V)$.
3. si se conoce la signatura, se conoce la nulidad y el rango.
4. si se conoce la nulidad, se conoce el rango.

Corolario 4.15 *Sean $A, C \in S_n(\mathbb{R})$. Entonces A y C son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura.*

Corolario 4.16 *Sea un espacio métrico (V, g) de dimensión n. Sea $\sigma(g) = (k, m)$.*

1. *La métrica es definida positiva sii $\sigma(g) = (n, 0)$.*
2. *La métrica es definida negativa sii $\sigma(g) = (0, n)$.*
3. *La métrica es semidefinida positiva sii $\sigma(g) = (k, 0)$.*
4. *La métrica es definida negativa sii $\sigma(g) = (0, m)$.*
5. *La métrica es no degenerada sii $k + m = n$.*
6. *La métrica es no degenerada sii $k + m < n$.*

Sabemos que la ecuación $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = 0$ tiene solución trivial si y sólo si todos los a_i son positivos, o todos los a_i son negativos. Por tanto:

Corolario 4.17 *Sea una forma cuadrática ϕ en $\mathbb{R}^n$ y consideramos la ecuación $\phi(x) = 0$. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. *La única solución es la trivial.*
2. *ϕ es definida positiva o definida negativa.*
3. *$\sigma(\phi) = (n, 0)$ o $\sigma(\phi) = (0, n)$.*

Una consecuencia del teorema de Sylvester, es el siguiente resultado que se usa en cálculo para saber si una matriz cuadrada y simétrica es definida positiva o definida negativa.

Teorema 4.18 *Sea (V, g) un espacio métrico y $A = M_B(g)$ para una base de B de V. Llamamos A_{ii} la submatriz que resulta de tomar en A las primera i filas y las primeras i columnas. Si denotamos por $|A_{ii}|$ su determinantes, tenemos:*

1. *La métrica g es definida positiva sii $|A_{ii}| > 0$ para todo i.*
2. *La métrica g es definida negativa sii $(-1)^i |A_{ii}| > 0$ para todo i .*

Demostración. Hacemos la demostración para el primer apartado (el otro es análogo). Supongamos que g es definida positiva. Ya que todo subespacio vectorial de un espacio métrico definido positivo es definido positivo, cada subespacio $U_i =< B_i >=< e_1, \ldots, e_i >$ es definido positivo, donde $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Por otro lado, el determinante de $M_{B_i}(g_{|U_i})$, que coincide con $|A_{ii}|$ es positivo porque esta matriz es congruente a la matriz identidad, luego es positivo.

El recíproco se hace por inducción sobre la dimensión del espacio vectorial. El caso $n = 1$ es evidente ya que $M_B(g)$ es una matriz 1×1, es diagonal, y por tanto, al tener determinante positivo, su signatura es $\sigma(g) = (1,0)$. Supongamos cierto para $n-1$ y sea $dim(V) = n$. Con la notación del apartado anterior, la expresión matricial $M_{B_{n-1}}(g_{|U_{n-1}}$ es la matriz $A_{n-1,n-1}$. Por hipótesis de inducción, $g_{|U_{n-1}}$ es definida positiva. Por el teorema de Sylvester, existe una base conjugada $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Como estos vectores son de U_{n-1}, entonces $B' = \{v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n\}$ s una base de V y la expresión matricial de g en dicha base es

$$M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & & & a_{1,n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tenemos ahora dos maneras diferentes para acabar la demostración (de forma análoga al teorema de Sylvester).

1. Sea sabe que g es no degenerada pues el determinante de A no es cero. Como $g_{|U}$ tampoco es degenerada, $V = U \oplus U^{\perp}$. Si $U^{\perp} =< v_n >$, entonces el conjunto $B'' = \{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n\}$ es base y

$$M_{B''}(g) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (1)$$

   con $\lambda = g(v_{n-1}, v_{n-1})$. Luego B'' es una base donde diagonaliza la métrica. Además, el signo del determinante de esta matriz es el mismo que $|A|$, por ser congruentes, en particular, es positivo. Pero $|M_{B''}(g)| = \lambda$, luego $\lambda > 0$ y así, $1\sigma(g) = (n,0)$, es decir, g es definida positiva.

2. Diagonalizamos por congruencias la matriz $M_{B'}(g)$. Para ello hacemos ceros en la última fila, haciendo transformaciones elementales del tipo $F_{n1}(-a_{n,1}), \ldots, F_{n,n-1}(-a_{n,n-1})$, y luego las mismas pero por columnas. Al final nos queda una matriz del tipo (1), y el argumento finaliza del mismo modo que en el apartado anterior.

Corolario 4.19 *Si (V,g) es un espacio vectorial métrico y $A = M_B(g)$ para cierta base, entonces si g es definida positiva (resp. definida negativa), entonces $|A| > 0$ (resp. $(-1)^n|A| > 0$).*

Mostramos un ejemplo de cómo se calcula dicha base con los dos métodos.

Ejemplo 4.20 (método 1) *Consideramos en $\mathbb{R}^3$ una métrica cuya expresión matricial respecto de la base usual es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

El primer paso es hallar el radical de la métrica. Ya que el rango de A es 2, la nulidad de g es 1. Entonces

$$R(g) = \{x : Ax = 0\} = \{(x,y,z) : x+2y+3z = 0, x-z = 0\} = < (1,-2,1) > .$$

Hallamos un subespacio en suma directa con $R(g)$. Para ello ampliamos a una base de $\mathbb{R}^3$ y tomamos el subespacio generado por los dos últimos vectores. Por utilidad posterior, ampliamos con los elementos de la base usual, por ejemplo, $B = \{(1,-2,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ y sea $U =< e_1, e_2 >$. Sabemos que U es no degenerado y la expresión de la métrica restringida a U respecto de la base $B' = \{e_1, e_2\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Buscamos un vector $u_1 \in U$ tal que $g(u_1,u_1) \neq 0$[3]. Para no complicarse, tomamos un vector de la base (si la hubiera) cuyo elemento (i,i) en la matriz no es cero. En este caso nos basta tomar $u_1 = e_1 = (1,0,0)$. Sabemos que $g(u_1,u_1) = 1$.

El segundo paso es hallar $< u_1 >^{\perp}$. Recordemos que esto se hace en el espacio métrico $(U, g_{|U})$. Como $u_2 \in U$, entonces se escribe $u_2 = xe_1 + ye_2 = (x,y,0)$. Ya que $g(u_2,u_1) = 0$, entonces

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, $x + 2y = 0$. Por tanto, $x = -2y$ y $u_2 = y(-2,1)$. Luego tomamos $u_2 = (-2,1)_{B'} = (-2,1,0)$. Calculamos $g(u_2,u_2)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4.$$

[3] La principal dificultad con este método es encontrar dicho vector

Por tanto la base $B'' = \{(1,-2,1),(1,0,0),(-2,1,0)\}$ diagonaliza la métrica con

$$M_{B''}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esto nos dice que la nulidad es 1, la signatura es $(1,1)$, el rango es 2 y el índice es 1. Hallamos una base conjugada dividiendo por $\sqrt{\pm g(u_i,u_i)}$, según el caso. Sólo hay que hacer para el tercer vector. Como $g(u_2,u_2) = -4$, dividimos por 2. Por tanto una base conjugada es $B''' = \{(1,-2,1),(1,0,0),(-1,1/2,0)\}$ y la expresión matricial de la métrica es

$$M_{B'''}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.21 (método 2) *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Como tenemos un pivote en el lugar $(1,1)$, hacemos ceros en la primera columna y fila.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-2),F_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{C_{21}(-2),C_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{C_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hallamos la base donde diagonaliza. Tomamos la matriz identidad y hacemos las mismas operaciones por columnas:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{21}(-2),C_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{32}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la base donde diagonaliza es $B' = \{(1,0,0),(-2,1,0),(1,-2,1)\}$ con

$$M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cambiamos ahora la base por $B'' = \{(1,0,0),(-1,1/2,0),(1,-2,1)\}$*, que es conjugada, y la matriz ahora es*

$$M_{B''}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $R(g) =< (1,-2,1) >$*, y se obtiene el mismo resultado que en el método anterior.*