Notas y observaciones sobre el tema 3

Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas. Curso 2015/16
Grupo: 2^0-B
Profesor: Rafael López Camino

---

1 Cálculo de las curvaturas principales en un cilindro

Calculamos de varias maneras las curvaturas principales en un cilindro circular recto de radio r sin usar los cálculos locales a partir de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental sino usando la definición, es decir, las curvaturas principales son los valores propios del endomorfismo de Weingarten. En todas las formas siguientes, se calculará primero la aplicación de Gauss, luego su diferencial, una base del plano tangente y aplicaremos el endomorfismo de Weingarten a dicha base.

1. Se considera el cilindro circular recto de radio r y eje $a \in \mathbb{R}^3$ ($|a| = 1$)

   $$S = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p|^2 - \langle p, a\rangle^2 = r^2\}.$$

   Si $v \in T_pS$ y α es una curva que representa a v, entonces $\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle - \langle \alpha(t), a\rangle^2 = r^2$. Derivando respecto de t y haciendo $t = 0$, tenemos

   $$2\langle v, p\rangle - 2\langle p, a\rangle\langle v, a\rangle = 0,$$

   es decir,

   $$\langle v, p - \langle p, a\rangle a\rangle = 0.$$

   Ya que v es un vector tangente arbitrario, se ha probado que el vector $p - \langle p, a\rangle a$ es un vector perpendicular a la superficie en cada punto, es decir, $T_pS =< p - \langle p, a\rangle a >^{\perp}$. Ahora hallamos una base del plano tangente: es claro que un vector es a, luego el otro es $(p - \langle p, a\rangle a) \times a$, es decir, $p \times a$. Luego una base de T_pS es $\{a, p \times a\}$.

   Dividiendo por su módulo (que es r) el vector perpendicular a S, podemos tomar como aplicación de Gauss

   $$N(p) = -\frac{1}{r}(p - \langle p, a\rangle a).$$

Por tanto,

$$(dN)_p(v) = -\frac{1}{r}(v - \langle v, a\rangle a)$$

y la aplicación de Weingarten es

$$A_p(v) = \frac{1}{r}(v - \langle v, a\rangle a).$$

Aplicamos a la base anterior de T_pS, obteniendo:

$$A_p(a) = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

$$A_p(v)(p \times a) = \frac{1}{r}(p \times a - \langle p \times a, a\rangle a) = \frac{1}{r} p \times a \Rightarrow \lambda = \frac{1}{r}.$$

Por tanto las curvaturas principales son $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1/r$ y así, $K = 0$ y $H = 1/(2r)$.

2. Vamos a hacer la cuenta para el cilindro de eje el eje z y radio r, es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Si $p = (x, y, z) \in S$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_pS$, y si α es una curva que representa a v, tenemos $\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 = r^2$, luego derivando en $t = 0$, tenemos, $2xv_1 + 2yv_2 = 0$. Esto lo escribimos como $\langle (x, y, 0), (v_1, v_2, v_3)\rangle = 0$, lo que prueba que el vector $(x, y, 0)$ es perpendicular a T_pS, es decir, $T_pS =< (x, y, 0) >^\perp$. En particular, una base de T_pS es $\{(0, 0, 1), (-y, x, 0)\}$.

De lo anterior, una aplicación de Gauss es $N(x, y, z) = -(x, y, 0)/r$. Hallamos la diferencial, obteniendo

$$-(dN)_{(x,y,z)}(v) = \frac{1}{r}(v_1, v_2, 0).$$

Por tanto

$$-(dN)_{(x,y,z)}(0, 0, 1) = \frac{1}{r}(0, 0, 0) \Rightarrow \lambda = 0.$$

$$-(dN)_{(x,y,z)}(-y, x, 0) = \frac{1}{r}(-y, x, 0) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{r}.$$

Y concluimos lo mismo que en el apartado anterior.

3. Consideramos la superficie como superficie de revolución y tomamos como parametrización $X(t,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, t)$. Una base del plano tangente es $\{X_t, X_\theta\}$, es decir,
$$\{(0,0,1), (-r\sin\theta, r\cos\theta) = (-y, x, 0)\}.$$
Hallamos una aplicación de Gauss tomando $X_t \times X_\theta$ y dividiendo por su módulo. El producto vectorial es $(-x,-y,0)$ y su módulo es r. Luego
$$N(x,y,z) = \frac{1}{r}(-x,-y,0).$$
Ahora la cuenta es la misma que en el apartado anterior. Sólo hay que observar que la parametrización recubre todo el cilindro excepto un meridiano, pero por la continuidad de las curvaturas, las podemos extender a dicha recta, y por tanto, a todo el cilindro.

4. Consideramos la superficie como grafo de una función, concretamente $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, es decir, es la función $y = f(x,z) = \sqrt{r^2 - x^2}$, donde f está definida en la banda $\{(x,z) : |x| < r\}$. La parametrización como grafo es
$$X(x,z) = (x, \sqrt{r^2 - x^2}, z).$$
Una base del plano tangente es
$$\{(1, 0f_x, 0), (0, f_z, 1)\} = \{(1, \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, 0), (0,0,1)\}$$
y un vector perpendicular es el producto vectorial de ambos vectores:
$$X_x \times X_z = (1, \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, 0) \times (0,0,1) = (-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, -1, 0),$$
o $(-x, -\sqrt{r^2 - x^2}, 0)$. Su módulo es r, luego, observando cómo es $X(x,z)$, tenemos
$$N(x,y,z) = \frac{1}{r}(-x, -\sqrt{r^2 - x^2}, 0) = -\frac{1}{r}(x,y,0).$$
De nuevo
$$A_{x,y,z}(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{r}(v_1, v_2, 0).$$
Por tanto
$$A_{x,y,z}(1, \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, 0) = \frac{1}{r}(1, \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, 0) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{r}.$$
$$A_{x,y,z}(0,0,1) = \frac{1}{r}(0,0,0) \Rightarrow \lambda = 0.$$
Obtenemos de nuevo el mismo resultado.

2 Usando cálculo de varias variables para 'controlar' una superficie

Planteamos la siguiente cuestión. Consideramos un grafo $z = f(x, y)$ donde la función f está definida en un dominio acotado $U \subset \mathbb{R}^2$ y supongamos que S 'acaba' en el borde de U, es decir, $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in \partial U$ (∂U denota la frontera de U). Tenemos que recordar que la función f no está definida en el borde de U, o dicho de otra manera, la superficie S no tiene 'borde', pues dejaría de ser superficie. Podemos pensar la situación anterior imaginado que la función está definida en un abierto más grande, luego tendriamos una superficie (la S) dentro de otra más grande. De todas maneras, no vamos a usar resultados de Cálculo en los puntos de ∂U.

Supongamos ahora que S tiene curvatura media H que no se anula en ningún punto, es decir, H tiene signo. Por ejemplo, podemos suponer que H es constantemente $c \in \mathbb{R}$. Vamos a probar que *la superficie se encuentra a un lado del plano* $z = 0$.

Importante: la curvatura media cambia de signo si la aplicación de Gauss cambia de signo.

Vamos a fijar la aplicación de Gauss y vamos a decir en qué lado se encuentra la superficie. Tomamos $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ como parametrización de S y como aplicación de Gauss, $N = (X_x \times X_y)/|X_x \times X_y|$. En tal caso vamos a probar:

> *Si $H > 0$, entonces la superficie se encuentra por debajo del plano $z = 0$, es decir,*
> $$f(x, y) < 0 \text{ en } U.$$

La demostración es por reducción al absurdo y supongamos que tiene puntos por encima. Sea $(x_0, y_0) \in U$ el punto donde f alcanza el máximo (como f está definida en $\overline{U}$, que es cerrado y acotado, entonces es un compacto). Intuitivamente, el plano tangente T_pS es horizontal, donde $p = (x_0, y_0, z_0)$ (hecho en clase). La prueba es la siguiente. Como alcanza un máximo, $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, es decir, $f_x = f_y = 0$ en (x_0, y_0). Una base del plano tangente es $\{X_x, X_y\}$, es decir, $\{(1, 0, f_x), (0, 1, f_y)\}$. Por tanto, en p la base es $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

Por otro lado, como es un máximo, la matriz hessiana de las parciales de orden dos de f en el punto debe ser semidefinida negativa, en particular, los elementos $(1, 1)$ y $(2, 2)$ de dicha matriz son no positivos. Dichos elementos son f_{xx} y f_{yy} luego

$$f_{xx}(x_0, y_0), f_{yy}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Escribimos la expresión de H en términos de la parametrización $X = X(x, y)$:

$$2H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

En el punto (x_0, y_0) se reduce a

$$2H(x_0, y_0) = (f_{xx} + f_{yy})(x_0, y_0).$$

Sin embargo, el lado de la izquierda es positivo y el de la derecha, no positivo, llegando a la contradicción.

3 Resultados de comparación

De la misma forma que se hizo para curvas, vamos a comparar la posición de dos superficies según el comportamiento de sus curvaturas. Igual que sucedía para curvas, la clave es plantear el problema geométrico en términos de Cálculo y usar sus herramientas para realizar la demostración.

Teorema 3.1. *Sea S una superficie y $p \in S$. Si $K(p) > 0$, entonces la superficie se encuentra en un entorno de p estrictamente a un lado de su plano tangente.*

Es evidente que aquí 'plano tangente' se refiere al plano tangente afín. Precisamos qué se quiere decir con 'estar a un lado'. El plano tangente afín T_pS divide al espacio $\mathbb{R}^3$ en dos componentes conexas, es decir, $\mathbb{R}^3 \setminus T_pS = T_pS^+ \cup T_pS^-$, donde

$$T_pS^+ = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - p, N(p)\rangle > 0\}, \quad T_pS^- = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - p, N(p)\rangle < 0\}.$$

Aquí $N(p)$ es el vector normal unitario definido en la superficie. Entonces el enunciado del ejercicio dice que existe un abierto $V \subset S$, $p \in V$, tal que $V \setminus \{p\} \subset T_pS^+$ o $V \setminus \{p\} \subset T_pS^-$.

Proof. Después de un movimiento rígido, podemos suponer que $p = (0, 0, 0)$, $O = (0, 0)$, T_pS es el plano de ecuación $z = 0$ y que en un entorno V de p en S, V es el grafo de una función $z = f(x, y)$, donde $f : U \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Sabemos entonces que la condición sobre el plano tangente equivale a $f_x(O) = f_y(O) = 0$. Tomamos la parametrización usual de grafo $X = X(x, y)$, con $X(U) = V$. Por otro lado, la expresión de K en términos de la función f es $K = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)/(1 + f_x^2 + f_y^2)^2$. Por tanto,

$$K(p) = (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(O).$$

La función $f(x,y)$ tiene un punto crítico en O. Para saber si es un mínimo local o un máximo local, vemos si la matriz hessiana es definida positiva o definida negativa en O. El determinante de dicha matriz en O es justo $K(p)$, luego dicho determinante es positivo. Por tanto, $f_{xx}(O) \neq 0$ (en caso contrario, el determinante sería menor o igual que cero). Luego $f_{xx}(O) > 0$ o $f_{xx}(O) < 0$. Esto nos dice que la matriz hessiana es definida negativa o definida positiva, respectivamente.

Una vez probado que O es un extremo relativo estricto, acabamos del siguiente modo. Supongamos que fuera un máximo local. Entonces existe un abierto $W \subset U$ alrededor de O tal que $f(x,y) < f(O) = 0$ para todo $(x,y) \in W$. Por tanto, en el abierto $X(W)$, se tiene que para todo punto distinto de p, su tercera coordenada (la función f) es negativa, es decir, está por debajo del plano tangente T_pS.

□

Corolario 3.2. *Si $K(p) < 0$, entonces en todo entorno de p, hay puntos a ambos lados (estrictamente) del plano tangente afín.*

Proof. Por contradicción, supongamos que existe un entorno donde los puntos se encuentra a un lado del plano tangente afín. Aquí estamos suponiendo que no es estricto, es decir, existe un abierto V alrededor de p tal que, por ejemplo, $V \subset \overline{T_pS^+}$. Con un argumento como en el teorema anterior, tendríamos que p es un mínimo local relativo, luego la matriz hessiano de f es semidefinida positiva, que quiere decir $K(p) \geq 0$, llegando a una contradicción. □

El segundo resultado de comparación nos lleva a extender el siguiente que se tenía para curvas planas (en éstas, la curvatura tenía un signo): si dos curvas son tangentes en un punto y una se encuentra por encima de la otra, entonces la curvatura de aquélla es mayor o igual que la otra en el punto de tangencia.

Teorema 3.3. *Sean dos superficies S_1 y S_2 que son tangentes un punto $p \in S_1 \cap S_2$. Orientamos las superficies para que el vector normal unitario coincida en p. Si S_1 se encuentra por encima de S_2 en un entorno de p (respecto de $N(p)$, entonces $H_1(p) \geq H_2(p)$.*

Ya que S_1 y S_2 tienen el mismo plano tangente en p y como $N(p)$ coinciden, decir que S_1 se encuentra por encima de S_2 en un entorno de p quiere decir que las coordenadas correspondientes a $N(p)$ en el sistema de referencia ortogonal dado por T_pS y $N(p)$, para los puntos de S_1 son mayores o iguales que las de S_2.

Proof. Después de un movimiento rígido, suponemos que T_pS_i es el plano $z = 0$, $p = (0,0,0)$ y que las superficies son grafo respecto del plano xy: $S_1 = \text{grafo}(f)$ y $S_2 = \text{grafo}(g)$. Orientamos los grafos para que en p tengamos $N(p) = (0,0,1)$. Por tanto, decir que S_1 se encuentra por encima de S_2 en un entorno de p equivale a decir que $f \geq g$ en un entorno de $(0,0)$.

Si tomamos la parametrización usual de los grafos, tenemos que $\nabla f(O) = \nabla g(O) = (0,0)$ y que $N(p) = (0,0,1)$. Entonces $H_1(p) = (f_{xx} + f_{yy})/2(O)$ y $H_2(p) = (g_{xx} + g_{yy})/2(O)$. Como la función $f - g$ tiene un mínimo local en O, entonces su matriz hessiana es semidefinida positiva, en particular, $(f-g)_{xx}(O) \geq 0$ y $(f-g)_{yy}(O)$ son mayores o iguales que 0. Sumando concluimos que $2(H_1(p) - H_2(p)) \geq 0$, obteniendo el resultado. $\square$

Como consecuencia de la demostración tenemos:

Corolario 3.4. *En toda superficie compacta hay puntos con curvatura de Gauss positiva. En particular, no hay superficies compactas con $H = 0$ en toda la superficie.*

Proof. Para la primera parte, sea q un punto que no está en S y p el máximo de la función definida en S como $p \longmapsto |p - q|$. Por tanto, la superficie se encuentra contenida en la bola determinada por la esfera centrada en q y radio r, donde $r = |p - q|$. Orientamos la esfera para que el normal apunte hacia la bola y S para que el normal en p sea el normal de la esfera en dicho punto.

Respecto de estos normales, la curvatura de las curvas planas en la superficie son mayores o iguales que en la esfera ya que se encuentra por encima que las curvas correspondiente de la esfera. Como dichas curvaturas son las curvaturas normales, entonces $\sigma_p(v,v) \geq 1/r$, en particular, $\kappa_i(p) \geq 1/r$, probando que $K(p) \geq 1/r^2$, como se quería probar.

Para la segunda parte del corolario, si existiera una superficie compacta con $H = 0$, como $H^2 \geq K$, entonces se tendría $K \leq 0$, lo cual no es posible. $\square$