Notas y observaciones sobre el tema 2

Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas
Grupo: 2^0-B
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Algunas técnicas para probar que un conjunto es una superficie

Teorema 1.1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ con la propiedad de que para cada $p \in S$, existe un abierto $p \in V \subset S$ tal que V es una superficie. Entonces S es una superficie.*

Demostración. Sea $p \in S$ y probamos que para p existe una parametrización. Por hipótesis, existe un abierto $V \subset S$ de p que es una superficie. Por tanto, existe $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to W \subset V \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización para la superficie V. Veamos que $X : U \to W$ también es una parametrización *de* S. Observemos que X es un homeomorfismo (transitividad de las topologías inducidas), $X : U \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable y que el rango de la derivada es 2 (es una cuestión local).

Lo único que queda es probar que W es un abierto en S. Pero esto es cierto ya que $W \subset V \subset S$ es un abierto de V y V también lo es de S. $\square$

Corolario 1.2 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ con la propiedad $S = \cup_{i \in I} S_i$ donde $S_i \subset S$ es un abierto y una superficie. Entonces S es una superficie.*

Aplicamos el corolario anterior para probar que $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie. Consideramos el abierto $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ y la función $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y tomamos las siguientes seis superficies (grafos de funciones):

$$S_1 = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in D\}, \quad S_2 = \{(x,y,-f(x,y)) : (x,y) \in D\}.$$

$$S_3 = \{(x,f(x,z),z) : (x,z) \in D\}, \quad S_3 = \{(x,-f(x,z),z) : (x,z) \in D\}.$$

$$S_5 = \{(f(y,z),y,z) : (y,z) \in D\}, \quad S_6 = \{(f(y,z),y,z) : (y,z) \in D\}.$$

Entonces $\mathbb{S}^2 = S_1 \cup \ldots \cup S_6$. Además, cada $S_i \subset \mathbb{S}^2$ es un conjunto abierto de $\mathbb{S}^2$, ya que es la intersección de la esfera con un semiespacio abierto de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, para S_1, tenemos

$$S_1 = \mathbb{S}^2 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}.$$

2. Superficies de revolución y cilindros rectos

Existen dos posibles definiciones de lo que es una superficie de revolución:

1. Una superficie es de revolución es una *superficie* que es invariante por un grupo uniparamétrico de rotaciones respecto de una recta dada.

2. Una superficie que se obtiene al girar una curva mediante un grupo uniparamétrico de rotaciones respecto de una recta dada. Concretamente, tomamos una curva contenida en un plano que contiene al eje (la recta dada), y la hacemos girar respecto de éste.

Para la definición (1), la superficie tiene una propiedad geométrica 'añadida'. Para la definición (2), tenemos una forma de 'construir' superficies. Algunas preguntas que surgen son:

1. ¿Una superficie del tipo 1) es obtenida mediante una construcción del tipo de la definición (2)?

2. ¿Una superficie del tipo (2) es del tipo (1)?

Nos centramos en la definición (2) ya que vamos a girar una curva y preguntarnos cuándo el conjunto que genera es una superficie.

Sin perder generalidad, podemos suponer que el eje L es el eje z y que el grupo es

$$G_L = \left\{ G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tomamos el plano xz como el plano P que va a contener a la curva. Es natural exigir algunas hipótesis respecto de la curva α contenida en P y que va a generar la superficie. Por ejemplo:

1. La curva tiene que ser regular. En caso contrario, se perdería la propiedad de que la el rango de la derivada es máximo.

2. No puede intersecar L, ya que en caso contrario, al girar, se formaría un 'pico' en la superficie, perdiendo la diferenciabilidad.

3. También hay que exigir que la curva α no se autointerseque porque entonces la superficie también se autointersecaría[1].

Tomamos la curva $\alpha : I \to P \subset \mathbb{R}^3$, que se escribirá como $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $t \in I$. Imponemos que α no corta L, , por ejemplo que $f > 0$[2]. Entonces al girar α sobre L obtenemos el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} S &= \{G(\theta)(\alpha(t)) : t \in I, \theta \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} : t \in I, \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t)) : t \in I, \theta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

[1] Nos estamos refiriendo a que la *traza* de la curva no se 'autointerseque'. Si estamos considerando la curva como una curva parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, es posible que la curva no sea inyectiva, pero esté en buenas condiciones. Esto sucede si $\alpha(t) = (\cos(t), 0, \sin(t))$, que no es inyectiva con $t \in \mathbb{R}$, pero la *traza* no se autointerseca.

[2] Sólo haría falta poner que $f(t) \neq 0$, pero entonces la curva α no sería conexa al estar separada por el plano $x = 0$. Como estamos suponiendo que α está definida en un intervalo I, entonces $\alpha(I)$ es conexa, luego necesariamente $f(t) > 0$ en I, o $f(t) < 0$ en I.

Antes de probar que es una superficie, observemos que S es invariante por G_L, y por tanto, en cuanto se pruebe que es una superficie, sería una superficie según la definición (1). La clave se encuentra en que G_L es un grupo con $G(\theta) \circ G(\varphi) = G(\theta + \varphi)$.

Proposición 2.1 *El conjunto S definido anteriormente satisface*

$$S = G(\varphi)(S), \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Por doble inclusión. Si $p \in S$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ y $t \in I$ tal que $p = G(\theta)(\alpha(t))$. Entonces

$$p = (G(\varphi) \circ (G(-\varphi)(G(\theta)(\alpha(t))) = G(\varphi)(G(-\varphi + \theta)(\alpha(t))) \in G(\varphi)(S),$$

pues $p = G(-\varphi + \theta)(\alpha(t)) \in S$. Por otro lado, si $p \in S$ y $\varphi \in \mathbb{R}$, entonces $p = G(\theta)(\alpha(t))$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$ y

$$G(\varphi)(p) = G(\varphi)(G(\theta)(\alpha(t))) = G(\varphi + \theta)(\alpha(t)) \in S.$$

□

Previamente a probar que es una superficie, uno podría hacer la siguiente consideración. Definimos la aplicación

$$X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad X(t, \theta) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t)). \tag{1}$$

Observemos que $X(I \times \mathbb{R}) = S$[3]. Entonces X es diferenciable y es fácil probar que rango$(dX) = 2$. Esto probaría que X es una *superficie parametrizada*, o dicho de otro modo, para cada $(t_0, \theta_0) \in I \times \mathbb{R}$, existe un abierto $(t_0, \theta_0) \in W \subset \mathbb{R}^2$ tal que $X(W)$ es una superficie. Aunque esto *no prueba* que el conjunto S es una superficie, sí lo es 'localmente' en el sentido expresado anteriormente.

Definitivamente, pasamos a demostrar que S es una superficie *si* a la curva α añadimos las hipótesis *convenientes* para que tener asegurada la primera propiedad de superficie, es decir, aquélla que la que la parametrización es un homeomorfismo. Por eso suponemos

> La curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es un embebimiento, es decir, $\alpha : I \cong \alpha(I)$.

Para probar que S es una superficie vamos a utilizar el teorema **??**.

Ya imaginamos que la dificultad va a ser probar que la parametrización sea un homeomorfismo. Ya anunciamos que hay que distinguir casos según dónde se encuentra el punto de S. Antes de distinguir los casos, veamos dónde radica el problema.

Tomamos un punto $p \in S$, y tomamos como parametrización la misma X que la dada en (**??**), sólo hay que estudiar cuál es su dominio, ya que la diferenciabilidad, y la propiedad sobre el rango de la derivada, sigue siendo ciertas. Para la inversa de la aplicación X podemos hacer lo siguiente.

Si $(x, y, z) \in S$, entonces $(x, y, x) = (f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t))$ para algún t y θ. Cambiando θ por un apropiado $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos suponer que $\theta \in [0, 2\pi]$. También sabemos $x^2 + y^2 = f(t)^2$, es decir, $f(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$. También que $z = g(t)$. Como $\alpha : I \to \alpha(I)$ es un homeomorfismo, entonces $t = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$.

[3]Como $I \times \mathbb{R}$ es conexo, S es conexa al ser imagen continua de un conexo.

Para obtener θ, podemos intentar con $y/x = \sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$, pero tenemos que asegurarnos que $x \neq 0$ y luego tomar la función arco tangente. Para tomar la función arco tangente, tenemos que restringir aún más el intervalo $[0, 2\pi]$. La función $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, \infty)$ es un homeomorfismo. Por tanto, consideramos que el dominio de X es $I \times (-\pi/2, \pi/2)$ y así

$$X : I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to X(I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) := V \subset S.$$

Entonces

$$X^{-1} : V \to I \times (0, \frac{\pi}{2}),\ X^{-1}(x, y, z) = (\alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \text{arc } \tan(y/x)),$$

probando que X^{-1} es continua.

Siguiendo el teorema **??**, queda por probar que $V = X(I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ es un conjunto abierto de S. Pero es evidente que

$$V = X(I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = S \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R}^2).$$

¿Cómo probar la propiedad de superficie para los restantes puntos? Tenemos dos argumentos diferentes para acabar.

1. Sea ahora otro $p \in S$. Este punto es de la forma $p = X(t, \theta)$, para algún $\theta \in [0, 2\pi]$. Si el valor θ se encuentra en $(\pi/2, 3\pi/2)$, entonces entonces el dominio de X cambia por $I \times (\pi/2, 3\pi/2)$. Y si el punto se corresponde con $\theta = \pi/2$ o $3\pi/2$, cambiamos el dominio por $I \times (0, \pi)$, $I \times (\pi, 2\pi)$, dependiendo del caso, y en vez de tomar la función arco tangente, tomamos arco cotangente y definir X^{-1} como

$$X^{-1}(x, y, z) = (\alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \text{arc } \cot(x/y)).$$

   La prueba de que $X(I \times (0, \pi))$ y $X(I \times (\pi, 2\pi))$ es abierto es análoga, pero poniendo ahora $S \cap (\mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R})$ o $S \cap (\mathbb{R} \times (0, -\infty) \times \mathbb{R})$.

2. Consideramos un giro $G(\theta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$. Recordemos que $G(\theta)_{|S} : S \to S$. Entonces

$$G(\theta)(V) = G(\theta)(X(I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})))$$

   es una superficie, pero también es un abierto de S, ya que $G(\theta) : S \to S$ es un homeomorfismo. Por último, hay que darse cuenta que

$$G(\theta) \circ X = X : I \times (-\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{\pi}{2} + \theta) \to S,$$

   y de esta forma, haciendo variar θ, vamos cubriendo todos los puntos de S. Aplicamos ahora el teorema **??**. En verdad, basta con considerar sólo *tres* ángulos más, por ejemplo, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$.

Realizamos otra prueba de que S es una superficie, evitando el uso de la función arco tangente y arco cotangente.

Como antes, el problema radica en que usamos la misma parametrización, pero hay que considerar el dominio apropiado para poder tomar la inversa de X. Se define

$$\beta : (0, 2\pi) \to \beta((0, 2\pi)) \subset \mathbb{R}^2, \quad \beta(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Esta aplicación es un homeomorfismo. Volvemos a tomar la aplicación X definida ahora en el intervalo $I \times (0, 2\pi)$ y buscamos la inversa. De nuevo, si $(x, y, z) \in X(I \times (0, 2\pi))$, entonces $t = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$. Por otro lado, como $(x, y) = f(t)\beta(\theta)$, y β es biyectiva, tomamos

$$\theta = \beta^{-1}\left(\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Entonces

$$X^{-1}(x, y, z) = \left((\alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \beta^{-1}\left(\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right).$$

Por tanto, el conjunto V es

$$V = X(I \times (0, 2\pi)).$$

Sólo queda probar que es un conjunto abierto. Pero basta darse cuenta que

$$V = S - \alpha(I) = S - (S \cap \{(x, 0, z) : x \geq 0\})$$

y $\{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$.

Para finalizar, habría que encontrar parametrizaciones para los puntos correspondientes a $\theta = 0$[4]. Pero ahora usamos argumentos como los que han aparecido, que consisten, por ejemplo, en hacer un pequeño giro de ángulo θ (por ejemplo $\theta = \pi/2$ a la anterior parametrización y recubrir así toda la superficie.

Resumimos los probado:

Teorema 2.2 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ un embebimiento de una curva cuya traza se encuentra en el semiplano $\{(x, 0, z) : x > 0\}$. Entonces $S = \{G(\theta)(\alpha(t)) : t \in I, \theta \in \mathbb{R}\}$ es una superficie con la propiedad de que es invariante por giros cuyo eje es el eje z.*

Este resultado se puede llevar al siguiente contexto. En vez de tener un embebimiento, podemos cambiar por una curva plana que sea cerrada y no se autointerseque. Por ejemplo, si tomamos una circunferencia en el semiplano $P^+ = \{(x, 0, z) : x > 0\}$, la superficie que se obtiene es un toro de revolución. Para formalizar esto, damos las siguientes definiciones:

1. Una curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es periódica si existe $T > 0$ tal que $\alpha(t + T) = \alpha(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. Una curva α es cerrada y simple si es periódica y $\alpha : [0, T) \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva.

Un simple argumento topológico de identificaciones prueba que $\alpha(\mathbb{R}) = \alpha([0, T])$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Sea $C = \alpha(\mathbb{R})$.

[4] Obsérvese que $S \cap \{(x, 0, z) : x > 0\} = \alpha(I) = X(I \times \{0\})$.

Lema 2.3 *Sea α una curva cerrada y simple. Si $p \in C$, existe un abierto $V \subset C$, $p \in V$ e $I \subset \mathbb{R}$ tal que $\alpha_{|I} : I \to V$ es un homeomorfismo (o $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es un embebimiento).*

Demostración. Sea $p \in C$. Suponemos sin perder generalidad que $p \neq \alpha(0) := p_0$, es decir, $p = \alpha(t)$ para un cierto $t \in (0,T)$. Tomamos $V = C - \{p_0\}$ y $\alpha : (0,T) \to V$. Es evidente que α es continua y biyectiva.

Para probar que α^{-1} es continua, tenemos que recordar los homeomorfismos en topologías cocientes. Sea R_α la relación de equivalencia definida en el dominio que identifica imágenes. Sabemos que

$$\frac{[0,T]}{R_\alpha} \cong \alpha(R) = C, \quad \frac{[0,T]}{R_\alpha} = \frac{[0,T]}{\{0,T\}} \cong \mathbb{S}^1.$$

Si $\bar{\alpha} : \frac{[0,T]}{R_\alpha} \to C$, entonces

$$\bar{\alpha} : \frac{[0,T]}{R_\alpha} - \{[0]\} \to C - p_0 = V,$$

es un homeomorfismo. Pero

$$\frac{[0,T]}{R_\alpha} - \{[0]\} = \frac{(0,T)}{R_\alpha} = (0,T),$$

luego $\bar{\alpha} = \alpha$, probando que $\alpha : (0,T) \to V$ es un homeomorfismo.

Aquí hay que hacer la siguiente observación importante. Si (X,τ) es un espacio topológico con una relación de equivalencia R, y $A \subset X$ que sea R-saturado, entonces tiene sentido considerar el espacio cociente $(A/R, \tau_{|A}/R)$. Pero este espacio no coincide necesariamente con $(A/R, (\tau/R)_{|A/R})$. Sin embargo, una condición suficiente para que se dé la igualdad es que A sea un conjunto abierto. ¡Éste es el caso que hemos considerado anteriormente con $X = [0,T]$ y $A = (0,T)$!!! que, además, es R_α-saturado.

Con unos argumentos parecido a los del teorema **??**, tenemos:

Teorema 2.4 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva cerrada y simple cuya traza se encuentra en el semiplano $\{(x,0,z) : x > 0\}$. Entonces $S = \{G(\theta)(\alpha(t)) : t \in I, \theta \in \mathbb{R}\}$ es una superficie con la propiedad de que es invariante por giros cuyo eje es el eje z.*

Con las mismas técnicas anteriores, podemos definir una familia de superficies del siguiente modo.

Definición 2.5 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva. Se define el cilindro recto sobre α como el conjunto*

$$S = \{(\alpha(s), t) : s \in I, t \in \mathbb{R}\}.$$

Nos preguntamos si S es una superficie. Un razonamiento análogo al hecho para superficies de revolución, obtenemos:

Teorema 2.6 *Sea α una curva de $\mathbb{R}^2$ que sea un embebimiento o una curva cerrada y simple. Entonces el cilindros recto sobre α es una superficie.*

3. Superficies dadas como imagen inversa de un valor regular

Esta parte viene motivada por un resultado de sistemas de ecuaciones lineales que nos dice que si tenemos m ecuaciones linealmente independientes con n incógnitas, el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de dimensión $n-m$. Ponemos $m=1$ y $n=3$. Entonces el conjunto de soluciones de una ecuación (no trivial) con tres incógnitas es un plano vectorial.

Pasamos ahora de sistemas de ecuaciones lineales a simplemente 'ecuaciones'. Todo el mundo entiende que en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$,

> "*una ecuación en tres variables define un conjunto de dimensión* 2."

En el contexto de superficies, 'conjunto de dimensión 2' quiere decir 'superficie'. Queremos formalizar todo esto. El ejemplo de superficie que nos va a motivar es la esfera que viene dada por $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2-1=0\}$. Entonces $\mathbb{S}^2$ es el conjunto de ceros de la ecuación $x^2+y^2+z^2-1=0$.

Para ello, hay que generalizar/formalizar el hecho de 'ecuaciones linealmente independientes' que habíamos dicho para sistemas de ecuaciones lineales.

Sea $f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un número $a \in \mathbb{R}$ se llama *valor regular de f* si todo $p \in f^{-1}(\{a\})$ no es un punto crítico de f, es decir, $(df)_p \neq 0$[5]. En el caso de la esfera, si calculamos la derivada y los puntos críticos, tenemos

$$(df)_{(x,y,z)} = (2x, 2y, 2z).$$

Luego el único punto crítico es $(x,y,z)=(0,0,0)$, y el único valor que no es regular es $f(0,0,0) = -1$. Por tanto, $a=0$ es un valor regular de f.

Teorema 3.1 *Sea $f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ un valor regular. Entonces $S = f^{-1}(\{a\})$ es una superficie.*

Para la demostración, usaremos el teorema de la función inversa del análisis matemáticas, y que enunciamos ahora:

Teorema 3.2 (función inversa) *Sea $f : O_1 \times O_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, $p = (x_0, y_0) \in O_1 \times O_2$ y escribimos*

$$(df)_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Supongamos que rang$(df)_p = m$, y sin perder generalidad, que

$$det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p) \neq 0.$$

[5] Esta propiedad es equivalente a decir que $(df)_p$ es sobreyectiva. Recordemos que la derivada es una aplicación lineal, en este caso, $(df)_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Por tanto, decir que $(df)_p \neq 0$ es lo mismo que decir que la imagen de dicha aplicación lineal tiene dimensión 1, es decir, es sobreyectiva. Esto lo tendremos presente cuando generalicemos el teorema **??** a los toremas **??** y **??**.

Si $f(p) = a$, existen abiertos $V_i \subset O_i$, $x_0 \in V_1$, $y_0 \in V_2$, tal que:

1. *Para cada $x \in V_1$ existe un único $y \in V_2$ con la propiedad $f(x, y) = a$.*
2. *La aplicación $g : V_1 \to V_2$ que lleva x en y con la propiedad $f(x, g(x)) = a$, es diferenciable.*

Demostración. [del teorema **??**] Para probar que es una superficie, vamos a probar que todo punto de S tiene un abierto que es una superficie, y aplicamos el teorema **??**. Concretamente, vamos a probar que para cada punto de S existe un abierto que es el grafo de una función, y se sabe que el grafo de una función es una superficie.

Sea $p \in S$, $p = (x_0, y_0, z_0)$ y ya que $(df)_p \neq 0$, supongamos $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Aplicamos el teorema de la función inversa del siguiente modo: tomamos un abierto de la forma $((x_0, y_0), z_0) \in O_1 \times O_2 \subset O \subset \mathbb{R}^3$ y $f : O_1 \times O_2 \to \mathbb{R}$. Observemos que estamos en las hipótesis, ya que $\text{rango}(df)_p = 1$ pues es equivalente a decir que $(df)_p \neq 0$. Usando la notación del teorema de la función inversa, éste nos dice

$$(V_1 \times V_2) \cap S = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in V_1\} = \text{grafo}(g).$$

Por tanto, $(V_1 \times V_2) \cap S$ es un abierto de S que contiene a p y es una superficie al ser el grafo de $g : V_1 \to \mathbb{R}$. □

Volvemos al caso de la esfera para ver qué dice la demostración anterior. Ya que estamos usando el teorema de la función implícita, se está despejando una variable en términos de las otras dos. Tomamos el punto $p = (0, 0, 1)$. La derivada de f en p es $(df)_p = (0, 0, 2)$. Como $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, podemos despejar z en función de (x, y). Aquí $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y $a = 1$. Entonces en un abierto $V_1 \subset \mathbb{R}^2$ que contiene a $(0, 0)$, la función

$$z = g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

es diferenciable y $(V_1 \times V_2) \cap \mathbb{S}^2$ es un abierto de $\mathbb{S}^2$ que es grafo de g. Sabemos que el abierto V_1 más grande es el disco D[6].

Si el punto es ahora $p = (0, 1, 0)$, ya sabemos que no podemos despejar z en función de (x, y) en un entorno de p. Esto se debe a lo siguiente. Si seguimos la demostración del teorema de la función inversa, la derivada f en p es: $(df)_p = (0, 2, 0)$. Ahora $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$ luego podemos despejar y en función de las otras variables, a saber,

$$y = g(x, z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2}.$$

Extendemos el teorema **??** de dos formas: primero, reduciendo la dimensión del dominio y obteniendo un resultado de curvas planas, y por otro, aumentando la dimensión en el codominio, obteniendo un resultado de curvas espaciales.

Teorema 3.3 *Sea $f : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ un valor regular. Entonces $C = f^{-1}(\{a\})$ es una curva regular en el siguiente sentido: para cada $p \in C$, existe $V \subset C$ un conjunto abierto en C con $p \in V$ tal que que V es la traza de una curva parametrizada regular de $\mathbb{R}^2$.*

[6]Observemos que el teorema de la función implícita (o inversa9 no nos informan de cuán de grande son los dominios de definición.

Teorema 3.4 *Sea $f : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ un valor regular, es decir, para cada $p \in f^{-1}(\{a\})$, rango$(df)_p = 2$. Entonces $C = f^{-1}(\{a\})$ es una curva regular en el siguiente sentido: para cada $p \in C$, existe $V \subset C$ un conjunto abierto en C con $p \in V$ tal que que V es la traza de una curva parametrizada regular de $\mathbb{R}^3$.*

4. Superficies, grafos de funciones e imágenes inversas

De la familia de ejemplos, podemos destacar dos: grafos de funciones y superficies que son imágenes inversas de un valor regular. Vamos a probar que toda superficie, *localmente*, se puede escribir de las dos formas anteriores.

De la demostración del teorema **??**, pero usando el teorema de la función inversa, probamos que toda superficie es localmente el grafo de una función, concretamente:

Teorema 4.1 *Sea S una superficie y $p \in S$. Entonces existe un abierto $p \in V \subset S$ tal que V es el grafo de una función sobre alguno de los tres planos coordenados.*

Demostración. Sea $p \in S$ y $X : U \to V' \subset S$ una parametrización alrededor de p. Como en $q = X^{-1}(p)$ el rango de $(dX)_q$ es 2, podemos suponer que si $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)$, entonces

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} (q) \neq 0. \tag{2}$$

Si $\pi(x,y,z) = (x,y)$ es la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy, entonces (**??**) dice que la función $F = \pi \circ X : U \to \mathbb{R}^2$ satisface que $(dF)_q$ es un isomorfismo. El teorema de la función inversa nos decir que existe un abierto $q \in U' \subset U$ y $W \subset \mathbb{R}^2$ abierto tal que $F : U' \to W$ es un difeomorfimo. Si $Y = X \circ F^{-1} : W \to Y(W) := V$ (V es abierto en V' y por tanto, en S), tenemos

$$\begin{aligned} V &= \{Y(u',v') : (u',v') \in W\} = \{(x \circ F^{-1})(u',v'), (y \circ F^{-1})(u',v'), (z \circ F^{-1})(u',v') : (u',v') \in W\} \\ &= \{(F \circ F^{-1})(u',v'), (F \circ F^{-1})(u',v') : (u',v') \in W\} \\ &= \text{grafo}(f), \qquad f = z \circ F^{-1}. \end{aligned}$$

□

De la demostración se deduce que el plano coordenado sobre el que es grafo es aquél correspondiente a los dos variables en el que el menor de orden 2 del jacobiano de X no es cero. Como consecuencia de este resultado, podemos ahora probar que ciertos subconjuntos del espacio euclídeo que aparentaban que no eran superficies, no son, efectivamente, superficies. Nos referimos a conjuntos con 'picos' y conjuntos 'con borde'.

1. El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es una superficie. En el punto $p = (0,0,0)$ hay un 'pico', y va a fallar la propiedad de la diferenciabilidad. Por el teorema **??**, existe un abierto de p que es grafo sobre uno de los planos coordenados. Como es evidente que no puede ser grafo sobre el plano xy o sobre el plano yz, necesariamente es sobre el plano xy. Pero en tal caso, la superficie tiene que ser el grafo de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sin embargo el punto p se corresponde con $x_0, y_0) = (0,0)$ y f no es diferenciable en el origen.

2. Consideramos es casquete esférico $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z \geq 1/2\}$. Esta superficie tiene una curva 'borde', concretamente la intersección $S \cap \{z = 1/2\}$. Tomamos el punto $p = (\sqrt{3}/2, 0, 1/2) \in S$. Por el teorema, existe un abierto V de p tal que esta superficie es un grafo de una cierta función f definido sobre un abierto U de uno de los planos coordenados. Denotamos π la correspondiente proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ y se tiene $\pi(V) = U$. No puede ser un grafo sobre el plano xz, luego tiene que ser sobre yz o sobre xy.

   En el primer caso, la proyección de V está en $P = (y,z) : z \geq 1/2\}$ y conteniendo al punto $(0, 1/2$. Sin embargo, $\pi(V) = U$ es un abierto, que al contener a p, no puede estar contenido en P, llegando a una contradicción.

   En el segundo caso, la proyección de V está en el disco $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1/4\}$ del xy-plano y contiene al punto $(\sqrt{3}/2, 0)$. Sin embargo, $\pi(V) = U$ es un abierto, que al contener a p, no puede estar contenido enteramente en D, llegando a una contradicción.

Para la otra parte de este apartado, recordemos que en la demostración del teorema **??** se probaba que todo punto de la superficie es grafo de una función.

Por el teorema anterior, ya sabemos que toda superficie es, localmente, el grafo de una función, luego localmente se puede escribir como $z = f(x,y)$ para cierta función. Es natural entonces definir $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ y tomar imagen inversa del 0.

Teorema 4.2 *Sea S una superficie y $p \in S$. Entonces existe un abierto $p \in V \subset S$, un abierto $O \subset \mathbb{R}^3$ y una función $F = O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $V = F^{-1}(\{0\})$ y 0 es un valor regular de F.*

Demostración. Del teorema **??** sabemos que existe $p \in V' \subset S$ tal que $V' = \text{grafo}(f)$, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sea $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ y veamos dónde hay que definir la función F. Un primer intento es el siguiente. Como V' es un abierto de S, $V' = S \cap O'$, donde O' es un abierto de $\mathbb{R}^3$. Entonces tomamos $F : O' \to \mathbb{R}$. Es evidente que $(dF)_{(x,y,z)} = (-f_x, -f_y, 1)$, luego no hay puntos críticos. Si hacemos $F^{-1}(\{0\})$, es evidente que $V' \subset F^{-1}(\{0\})$, pero la otra inclusión no está clara. Y menos claro es si F está 'bien definida': esto sólo sucede si las coordenadas (x,y) de los puntos de O' están en U.

Evitamos los problemas intersecando O' con el paralepípedo con base U, es decir, $U \times \mathbb{R}$ y definir $O = (U \times \mathbb{R}) \cap O'$ y

$$V = (U \times \mathbb{R}) \cap V' = O \cap S.$$

De esta manera, la función $F : O \to \mathbb{R}$ está bien definida. De nuevo, es trivial la inclusión $V \subset F^{-1}(\{0\})$. Sea ahora $(x,y,z) \in F^{-1}(\{0\})$. Entonces $z - f(x,y) = 0$ y $(x,y) \in U$. Luego $(x,y,z) = (x,y,f(x,y)) \in \text{grafo}(f) = V$. $\square$

5. Inmersiones o superficies parametrizadas

Ya hemos observado que en la prueba de que cierto conjunto del espacio es una superficie, es la primera propiedad referida al homeomorfismo la que resulta más difícil. Las otras dos, la diferenciabilidad, y la propiedad del rango de la derivada son locales y se comprueban fácilmente.

Podemos considerar una aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que sea diferenciable y que su derivada tiene rango 2. Nos preguntamos si $S = X(U)$ es una superficie. Es más, incluso nos podemos preguntar si X, o la restricción de X a un abierto más pequeño que U, es una parametrización en S.

Definición 5.1 *Una aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que es diferenciable y que su derivada tiene rango 2 se llama inmersión o superficie parametrizada.*

Teorema 5.2 *Si X es una superficie parametrizada y $q_0 \in U$, entonces existe $U' \subset U$ un abierto conteniendo a q_0 tal que $X(U')$ es una superficie y $X_{|U'} : U' \to X(U')$ es una parametrización.*

Atención: $X(U')$ no tiene porqué ser un abierto en $X(U)$.

Demostración. Del teorema **??** y tomando $V' = X(U)$, se concluye que existe un abierto $U' \subset U$ que contiene a q_0 tal que $X(U')$ es el grafo de una función, luego es una superficie.

Recordemos que en aquel teorema, se usaba que S era superficie al decir que V era abierto de un abierto V' de S.

Este teorema proporciona de manera inmediata una técnica para probar que un conjunto sea una superficie.

Corolario 5.3 *Sea S un conjunto de $\mathbb{R}^3$ tal que para cada $p \in S$, existe una aplicación $X : U \to \mathbb{R}^3$ con las siguientes propiedades:*

1. *X es una inmersión.*
2. *$p \in X(U)$.*
3. *$X(U)$ es un abierto de S.*

Entonces S es una superficie.

Como ejemplo, una superficie de revolución es, efectivamente, una superficie. Para ello, y volviendo a la sección anterior, cada punto tenía un abierto alrededor suyo, concretamente, la superficie menos el meridiano opuesto, que era la imagen de una inmersión, a saber, X. La diferencia entre esta demostración y la que se hizo en su lugar es que ahora no tenemos que probar que X es un embebimiento, ya que el último corolario nos dice que X, restringiendo apropiadamente, es un embebimiento.

6. El plano tangente

La idea intuitiva de un vector tangente a una superficie S en un punto p es la de ser vector velocidad de una trayectoria en S que pasa por p. Consideramos para ello una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva (diferenciable) cuya traza se encuentra en S de manera que en un instante $t_0 \in I$ pase por p: $\alpha(t_0) = p$. Supondremos a partir de ahora, sin perder generalidad, que $t_0 = 0 \in I$, y así, $\alpha(0) = p$.

Por otro lado, si vemos la curva α como una aplicación cuyo dominio cae en S, es decir, $\alpha : I \to S$, podemos asegurar que α es *diferenciable*: en tal situación dicha curva es diferenciable si vista en $\mathbb{R}^3$, es diferenciable, es decir, $i \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^3$. Pero esta curva es justamente la que habíamos considerado desde el principio. Por tanto, el vector velocidad $\alpha'(0)$ será un vector tangente a S en p.

Definición 6.1 *Un vector $v \in \mathbb{R}^3$ se dice que es un vector tangente a S en p si existe una curva $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. El conjunto de todos los vectores tangentes a S en p se llama el plano tangente a S en p y se denotará por T_pS.*

Observemos por ejemplo que el vector cero $0 \in \mathbb{R}^3$ es un vector tangente en cualquier punto: basta tomar $\alpha(t) = p$ $(t \in \mathbb{R})$.

Probamos que el plano tangente T_pS es, efectivamente, un espacio vectorial de dimensión 2.

Teorema 6.2 *Sea $p \in S$. Entonces el plano tangente T_pS es un plano vectorial. Además, si $X : U \to V \subset S$ es una parametrización alrededor de p, se tiene*

$$T_pS = (dX)_q(\mathbb{R}^2), \quad q = X^{-1}(p). \tag{3}$$

Como consecuencia, una base de T_pS es $\{X_u(q), X_v(q)\}$.

Antes de la demostración, hacemos varias observaciones:

1. Por $(dX)_q$ denotamos la derivada de X. Recordemos que $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable. La derivada de X en $q \in U$ es la aplicación lineal

$$(dX)_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (dX)_q(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(q + tw).$$

   O dicho de otra manera, $(dX)_q(w)$ es la derivada direccional de X en q y en la dirección de w. Por otro lado, y ya que X es un parametrización, el rango de la derivada es 2, es decir, $\dim(dX)_q(\mathbb{R}^2) = 2$. Por tanto, si probamos la igualdad (**??**) se tiene por un lado que el plano tangente es un espacio vectorial y que su dimensión es 2.

2. Si $\{e_1, e_2\}$ es la base usual de $\mathbb{R}^2$, entonces $X_u(q) = (dX)_q(e_1)$ y $X_v(q) = (dX)_q(e_2)$. Además, $X_u(q)$ es el vector tangente de la curva coordenada $v = v_0$ en q, donde $q = (u_0, v_0)$. Del mismo modo, $X_v(q)$ es el vector tangente de la curva coordenada $u = u_0$.

3. En la igualdad anterior, el lado de la izquierda es independiente de la parametrización. Por tanto $(dY)_{Y^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2) = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2)$.

La demostración de (**??**) es por doble inclusión.

1. $T_pS \subset (dX)_q(\mathbb{R}^2)$.
   Sea $v \in T_pS$ y sea α una curva que lo represente. Llamamos $\tilde{\alpha} : I \to U$ la curva en el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\alpha} = X^{-1} \circ \alpha$, o escrito de otra manera, $\alpha(t) = X(\tilde{\alpha}(t))$. Si escribimos $\tilde{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ se tiene que $\tilde{\alpha}(0) = q$ y usando la regla de la cadena:

$$v = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q),$$

   que pertenece a $(dX)_q(\mathbb{R}^2)$.

2. $(dX)_q(\mathbb{R}^2) \subset T_pS$.

   Sea $v \in (dX)_q(\mathbb{R}^2)$. Entonces existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $v = (dX)_q(w)$. Pero

$$v = (dX)_q(w) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(q + tw).$$

   Si llamamos $\alpha(t) = X(q+tw)$, entonces α es diferenciable por ser composición de dos aplicaciones diferenciables, $\alpha(0) = X(q) = p$ y usando la regla de la cadena $\alpha'(0) = (dX)_q(w) = v$.

En la práctica, para hallar el plano tangente a S en un punto p, se halla una parametrización X alrededor de p, y entonces el plano tangente está generados por las derivadas parciales $X_u(q)$ y $X_v(q)$.

Mostramos dos ejemplos del cálculo del plano tangente a una superficie *usar parametrizaciones*.

1. Sea P un plano de $\mathbb{R}^3$. Si dicho plano lo escribimos como $P = p_0 + \vec{P}$, veamos que $T_pP = \vec{P}$, es decir, el plano vectorial (director) de P. También podemos escribir el plano P como

$$P = \{q \in \mathbb{R}^3 : \langle q - p_0, a\rangle = 0\}$$

   donde a es un vector perpendicular a $\vec{P}$. Concretamente, si ponemos $q = (x, y, z)$, la ecuación $\langle q - p_0, a\rangle = 0$ es la ecuación general de P.

   Si $v \in T_pS$, entonces $v = \alpha'(0)$ para cierta curva en P que pasa por p. Por tanto, $\langle \alpha(t) - p_0, a\rangle = 0$. Derivando en $t = 0$, tenemos $0 = \langle \alpha'(0), a\rangle = \langle v, a\rangle$. Se ha probado pues que $v \in < a >^\perp$ y así, $T_pS \subset < a >^b ot$. Ya que $< a >^\perp$ tiene dimensión 2, tenemos la igualdad $T_pS =< a >^b ot$. Finalmente hay que observar que $< a >^b ot = \vec{P}$.

2. Sea $f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en el abierto O y sea $a \in \mathbb{R}$ un valor regular. Sea la superficie $S = f^{-1}(\{a\})$. Hallamos el plano tangente en un punto $p \in S$. Si $v \in T_pS$ y α es una curva que lo representa entonces $f(\alpha(t)) = a$. Derivando respecto de t y haciendo $t = 0$, tenemos (usando la regla de la cadena de Cálculo) $0 = (df)_p(v) = \langle \nabla f(p), v\rangle$, donde ∇f es el gradiente de f. Por tanto, v es perpendicular a $\nabla f(p)$, es decir, $T_pS \subset< \nabla f(p) >^\perp$. Ya que los dos espacios vectoriales tienen dimensión 2, se tiene la igualdad $T_pS =< \nabla f(p)\rangle^\perp$.

   Así por ejemplo, si tomamos el hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, que es $f^{-1}(\{1\})$ donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, se tiene $\nabla f = (2x, 2y, -2z)$, luego $T_{(x,y,z)}S =< (x, y, -z) >^\perp$. Si queremos hallar la ecuación general de dicho plano en un punto (x_0, y_0, z_0), entonces concluimos $\langle(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0), (x_0, y_0, -z_0)\rangle = 0$, es decir, $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) - z_0(z - z_0) = 0$.

7. Diferencial de una aplicación diferenciable

Una vez conocido el concepto de diferenciabilidad de una aplicación diferenciable definida en una superficie, el siguiente paso es definir su derivada, que llamaremos a partir de ahora diferencial. Para motivar su definición tenemos que recordar cuál era la definición dada en Cálculo de derivada de una función definida entre abiertos de espacios euclídeos.

Si $f : O \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación diferenciable definida en el abierto O, y si $p \in O$, la derivada de f en p es la aplicación lineal

$$Df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad Df_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p+tv).$$

A $(Df)_p(v)$ se le llama *derivada direccional* de f en p en la dirección de $v \in \mathbb{R}^n$. A partir de ahora, vamos a cambiar la notación $(Df)_p$ por $(df)_p$ y en vez de derivada de f en p diremos *diferencial* de f en p.

Pasamos ahora a definir la diferencial de una aplicación en una superficie. Recordemos que había tres tipos de aplicaciones diferenciables: las que tienen como dominio una superficie y llegan a un espacio euclídeo, las que salen de un espacio euclídeo y llegan a una superficie y las que hay entre superficies. Nos centramos ahora en las del primer tipo.

Sea $f : S \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable en $p \in S$. El hecho remarcable aquí es que S *no es un abierto de* $\mathbb{R}^3$ y por tanto, no podemos definir su diferencial como la que había entre espacios euclídeos. En verdad, ningún punto de la superficie tiene un abierto de $\mathbb{R}^3$ contenido en S, pues entonces, tendría un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ y sabemos que cada punto de una superficie tiene entornos homeomorfos a $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$ [7]

Sin embargo, nos fijamos un poco más en lo que sucede en la definición de diferencial entre espacios euclídeos. La aplicación $t \to p+tv$ parametriza una curva diferenciable en $\mathbb{R}^n$, concretamente la recta que pasa por p a velocidad v. Esta curva satisface que en $t=0$ es p y su velocidad en $t=0$ es v. Más aún, podemos cambiar esta curva, a saber, una recta, por *cualquier otra curva* con las dos propiedades anteriores. Efectivamente, sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Usando la regla de la cadena, y derivando en $t=0$, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\alpha(t)) = (df)_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = (df)_p(v).$$

Por tanto, en la definición de $(df)_p$ podemos cambiar la recta por cualquier otra curva α que represente a v. El hecho de elegir la recta $p+tv$ fue sólo por que es la más 'sencilla'.

Una vez hecha esta observación, ya tenemos la clave para definir la diferencial de $f : S \to \mathbb{R}^m$: formalmente es lo mismo que lo que sucede en espacios euclídeos:

$$(df)_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \alpha(t),$$

donde $\alpha : I \to S$ es una curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Antes de continuar, unas observaciones:

1. Necesariamente la traza de α tiene que estar en S, pues aplicamos a α la aplicación f.
2. Si α es una curva en S, entonces $\alpha'(0) = v$ es un vector tangente a S en p.
3. Importante: por la nota anterior, la diferencial de f está definida en el plano tangente. es por ello que previamente hemos hecho su definición.

[7] El razonamiento tiene que precisarse. Si $p \in S$ tiene un entorno en S homeomorfo a $\mathbb{R}^3$, tiene dentro del mismo una bola de $\mathbb{R}^3$, y por tanto, bolas de radio tan pequeño como se quiera. Por otro lado, existe un abierto $V \subset S$ que contiene a p y es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Dentro de V existe una bola $B_r(p) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $B_r(p) \cap S \subset V \subset S$. Pero también sabemos que existe $\delta > 0$ tal que la bola de $\mathbb{R}^3$ dada por $B_\delta(p)$ satisface $B_\delta(p) \subset B_r(p) \cap S$, en particular, $B_\delta(p) \subset B_r(p)$, pero no es posible que una bola de $\mathbb{R}^3$ esté contenida en una bola de $\mathbb{R}^2$.

4. Cuando f es entre espacios euclídeos, podemos imaginar que 'el plano tangente a $O \subset \mathbb{R}^n$ en p es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Definición 7.1 *Sea $f : S \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable en $p \in S$. Se define la diferencial de f en p como*

$$(df)_p : T_pS \to \mathbb{R}^m, \quad (df)_P(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \alpha(t).$$

Antes de ver algunas propiedades de la diferencial, damos la definición de la diferencial en los otros dos casos.

Definición 7.2

1. *Sea $f : O \subset \mathbb{R}^n \to S$ una aplicación diferenciable en $p \in O$. La diferencial de f en p es $(d(i \circ f))_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$, donde esta diferencial es la derivada de la aplicación $i \circ f$ definida entre abiertos de espacios euclídeos. Esta diferencial está definida como $(df)_p : \mathbb{R}^n \to T_pS$ pues $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(i \circ f \circ \alpha)(t)$ es una curva que llega a S.*
2. *Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable en p. La diferencial de f en p es $(df)_p = d(i \circ f)_p$, donde ahora $i \circ f$ es una aplicación que sale de una superficie y llega a $\mathbb{R}^3$. Evidentemente, $(df)_p : T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$.*

Para las propiedades, las realizamos en aplicaciones que van desde una superficie a un espacio euclídeo.

Teorema 7.3 *Si $f : S \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación diferenciable en p, entonces $(df)_p$ es una aplicación lineal. Concretamente, si X es una parametrización alrededor de p, entonces*

$$(df)_p = (df \circ X)_q \circ (dX_q)^{-1},$$

donde $q = X^{-1}(p)$ y $dX_q : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es la diferencial de $X : U \to V \subset S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Recordemos que la derivada de X, $(dX)_q$ tiene rango 2, es decir, es un isomorfimo sobre su imagen, a saber, el plano tangente T_pS.

Demostración. La linealidad se prueba si tenemos la igualdad anterior. Sea $v \in T_pS$ y α una curva en S que lo representa, sea $\tilde{\alpha} = X^{-1} \circ \alpha$, es decir, $\alpha(t) = X(\tilde{\alpha}(t))$. Ya que $f \circ \alpha = f \circ X \circ X^{-1} \circ \alpha = (f \circ X) \circ \tilde{\alpha}$, usando la regla de la cadena de cálculo, tenemos

$$(df)_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ X) \circ \tilde{\alpha}(t) = d(f \circ X)_q(\tilde{\alpha}'(0)).$$

Como $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es un isomorfismo y $(dX)_q(\tilde{\alpha}'(0)) = \alpha'(0) = v$, podemos despejar, obteniendo $\tilde{\alpha}'(0) = ((dX)_q)^{-1}(v)$, consiguiendo:

$$(df)_p(v) = d(f \circ X)_q((dX_q)^{-1}(v)),$$

luego

$$(df)_p = d(f \circ X)_q \circ (dX_q)^{-1}.$$

Una vez definida la diferencial de una aplicación diferenciables (para todos los tipos de aplicaciones), se puede probar muchas más propiedades sobre la diferencial que no es más que tomar las propiedades que tiene la diferencial de una aplicación diferenciable entre espacios euclídeos, y extenderla a aplicaciones donde intervengan superficies. Así tenemos que si una aplicación satisface que todos sus puntos son críticos, es decir, $(df)_p = 0$ para todo p, entonces f es constante en cada componente conexa de su dominio. Veamos una forma de usar este resultado para superficies.

Sea una superficie (conexa) S con la propiedad de que todas las rectas normales pasan por un mismo punto. Probar que S es un abierto de una esfera.

Sea $p_0 \in \mathbb{R}^3$ el punto que está en todas las rectas normales. Entonces el vector $p - p_0$ está en la recta normal a S que pasa por p, o dicho de otro modo, $p-p_0$ es perpendicular a todos los vectores tangentes a S en p, *para todo* $p \in S$. Definimos

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(p) = |p - p_0|^2.$$

Esta aplicación es diferenciable (ejercicio!). Veamos que es constante, probando que todo punto de S es un punto crítico de f. Si $p \in S$, $v \in T_pS$, y $\alpha : i \to S$ una curva que representa a v, entonces

$$\begin{aligned} (df)_p(v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0 \rangle \\ &= 2\langle \alpha'(0), \alpha(0) - p_0 \rangle = \langle v, p - p_0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ya que f es constante, y dicha constante no es 0 (ejercicio!), se tiene $|p - p_0| = r > 0$, es decir, S está incluida en una esfera de centro p_0 y radio r.

8. Puntos críticos y plano tangente

(Suponemos que todas las superficies son conexas. Estudiar qué sucede en esta sección si no lo son.)

En la definición de plano tangente a una superficie, tenemos dos definiciones. Una es la de considerar el plano tangente *vectorial*, que simplemente lo hemos llamado 'plano tangente' y denotado por T_pS, que está formado por todos los vectores tangentes a S en p. Por otro lado, tenemos el *plano tangente afín* en un punto $p \in S$ como el plano afín que pasa por p y tiene como variedad de dirección T_pS. También lo vamos a denotar por T_pS y no habrá confusión ya que en cada momento, y según el contexto, se sabrá a cuál de los dos nos estamos refiriendo.

Antes de estudiar esta asignatura, el alumno tiene la idea del plano tangente afín a S en p como un plano P de $\mathbb{R}^3$ que interseca a S sólo en el punto p, dejando la superficie a un lado de P. Como vemos, esto no está relacionado, al menos en un primer momento, con nuestra definición. Hay que observar que puede ocurrir esto localmente alrededor de $p \in S$, pero el plano puede intersecar a la superficie en otros puntos. Ni incluso en este caso, el plano tangente T_pS deja a la superficie a un lado. Un ejemplo es el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$. En el punto $p = (0, 0, 0) \in S$, el plano tangente afín es el plano P de ecuación $z = 0$ que en *todo* entorno de p deja puntos a un lado y a otro. Concretamente, la curva $\alpha(x) = (x, 0, x^2)$ para por p en $x = 0$ y para todo entorno de $x = 0$, los puntos se encuentra por encima de P. Por otro lado, la curva $\beta(y) = (0, y, -y^2)$ tiene puntos por debajo de P en todo entorno de $y = 0$.

El resultado que relaciona nuestra intuición de plano tangente con el concepto de plano tangente a una superficie es el siguiente.

> *Si P es un plano que deja a un lado la superficie S en un entorno de $p_0 \in S$ y $p_0 \in P \cap S$, entonces P es el plano tangente afín a S en p_0.*

Recordamos qué significa 'dejar a un lado de P'. El conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus P$ tiene exactamente dos componentes conexas, cada una de ellas es un abierto de $\mathbb{R}^3$. Decimos que un conjunto está a un lado de P si está contenido en la clausura de una de estas dos componentes. Concretamente, si $P = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - q, a\rangle = 0\}$ con $q \in P$ y $|a| = 1$, entonces $\mathbb{R}^3 \setminus P = \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - q, a\rangle > 0\} \cup \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - q, a\rangle < 0\}$, y cada lado de P, es decir, la clausura de los dos anteriores conjuntos es

$$P^+ := \{X \in \mathbb{R}^3 : \langle X - q, a\rangle \geq 0\}, \quad P^- = \{X \in \mathbb{R}^3 ; \langle X - q, a\rangle \leq 0\}.$$

En el resultado anterior nos dice que existe un abierto de p_0, el cual denotamos de nuevo por S (un abierto de una superficie es de nuevo una superficie) tal que $S \subset P^+$ o $S \subset P^-$. Sin perder generalidad, suponemos el primer caso.

Definimos

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(p) = \langle p - q, a\rangle.$$

Entonces $f \geq 0$ y $f(p_0) = 0$, luego p_0 es un mínimo (global) de f. Ya que f es diferenciable, p_0 es un punto crítico de f, y como el codominio de f es $\mathbb{R}$, quiere decir que $(df_{p_0}) = 0$: $(df_{p_0})(v) = 0$ para todo $v \in T_{p_0}S$. Un cálculo inmediato da

$$(df_{p_0})(v) = \langle v, a\rangle.$$

Por tanto, $T_{p_0}S \subset < a >^\perp$, y como las dimensiones son iguales, $T_{p_0}S = < a >^\perp$. Ya que $< a >^\perp = \vec{P}$, la variedad de dirección de P, y $p_0 \in P$, el plano tangente afín a S en p_0 es P.

Este resultado se puede generalizar del siguiente modo (el razonamiento es local). Supongamos que tenemos dos superficies que tienen un punto común p y una superficie se encuentra a un lado de la otra en un entorno de p. Entonces las dos superficies tienen el mismo plano tangente en p. Si queremos formalizar lo anterior, sólo tenemos que formalizar el hecho de una una superficie se encuentra a un lado de la otra. Para el caso considerado anteriormente, decíamos 'estar a un lado de un plano'. La clave en aquel momento es que el plano dividía al espacio en dos componentes y que podíamos escribir en términos de inecuaciones dichas componentes.

Para el caso considerado aquí, tomamos la superficie de la cual queremos decir 'estar a un lado' de ella. Localmente es el grafo de una función respecto de uno de los planos coordenados. Suponemos que dicho plano es el plano xy, luego la superficie se escribe locamente como $SS = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ para cierta función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Entonces podemos definir cada lado de S como

$$S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq f(x, y)\}, \quad S^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq f(x, y)\}.$$

En verdad esto no tiene sentido si el punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisface que $(x, y) \notin U$, pero como hemos dicho, el resultado es local, luego basta considerar sólo el 'cilindro' $U \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\}$. Concretamente, es fácil probar que (asumiendo que U es conexo, para que lo sea S) S divide $U \times \mathbb{R}$ en dos componentes conexas, a saber, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > f(x,y)\}$ y $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < f(x,y)\}$.

Sea ahora otra superficie S', que supondremos contenida en $U \times \mathbb{R}$ y supongamos que $p_0 \in S \cap S'$ y S' está un lado de S en un entorno de p_0. Veamos que $T_{p_0}S = T_{p_0}S'$.

Sea $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Primero, hallamos $T_{p_0}S$. Como S es un grafo sabemos que $T_{p_0}S =< (-\nabla f(x_0, y_0), 1) >^{\perp}$.

Sin perder generalidad, suponemos que $S' \subset S^+$, es decir,

$$(x,y,z) \in S' \Rightarrow z \geq f(x,y).$$

Definimos

$$F : S' \to \mathbb{R}, \quad F(x,y,z) = z - f(x,y).$$

Entonces $F \geq 0$ y $F(p_0) = 0$. Por tanto, p_0 es un mínimo de F y como F es diferenciable (Ej.!), es un punto crítico de F. De nuevo $(dF)_{p_0} = 0$, es decir, $(dF)_{p_0}(v) = 0$ para todo vector $v \in T_{p_0}S'$. Ya que F la restricción de una aplicación diferenciable definida en $\mathbb{R}^3$ (concretamente, definida en $U \times \mathbb{R}$), entonces, $(dF)_{p_0} = (DF)_{p_0 | T_{p_0}S'}$, donde por $(DF)_{p_0}$ indicamos la derivada de F vista como función de $\mathbb{R}^3$. Sabemos que en coordenadas respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$,

$$(DF)_{p_0} = \nabla F(p_0) = (-\nabla f(x_0, y_0), 1).$$

Por tanto,

$$0 = (dF)_{p_0}(v) = \langle \nabla F(p_0), v \rangle = \langle (-\nabla f(x_0, y_0), 1), v \rangle.$$

Esto prueba que $T_{p_0}S' \subset< (-\nabla f(x_0, y_0), 1) >^{\perp} = T_{p_0}S$. Luego $T_{p_0}S' = T_{p_0}S$ y los planos tangentes afines coinciden ya que $p_0 \in S \cap S'$.