Notas y observaciones sobre el tema 1

Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas
Grupo: 2^0-B
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Ecuaciones de la tractrix y la catenaria

Mostramos cómo se calculan las parametrizaciones de la tractrix y la catenaria.

1. La *tractrix* es la curva de $\mathbb{R}^2$ con la siguiente propiedad: en cada punto, la recta tangente a la curva interseca al eje y en un punto cuya distancia al correspondiente punto de la curva es constantemente 1. Intuitivamente esta curva se puede imaginar del siguiente modo. Una persona recorre el eje y tirando de un perro con una correa de longitud 1. El perro tira en dirección contraria al camino que lleva la persona. Esto quiere decir que la cuerda siempre está tirante. Entonces la tractrix es la curva que describe el perro.

   El primer (y principal) problema a la hora de resolver este ejercicio es hallar el adecuado parámetro t de la curva. Vamos a suponer que la curva está en el lado derecho del eje y (de la misma forma se puede hacer si estuviera a la izquierda, ¡hacer!). El parámetro t va a ser el ángulo que hace la recta tangente en cada punto con el eje y (si se toma la curva a la izquierda del eje y, es mejor el ángulo con el eje x ¡hacer!). También se puede tomar el ángulo con el eje x, sólo que al final, hay una integral que cuesta algo más trabajo hacerla.

   La ecuación de la recta tangente en el punto $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es

   $$Y - y(t) = \cot(t)(X - x(t)).$$

   Intersecamos con el eje y, es decir, hacemos $X = 0$, obteniendo

   $$Y = -\cot(t)x(t) + y(t),$$

   dando el punto $(0, -\cot(t)x(t) + y(t))$. La distancia desde este punto a $\alpha(t)$ tiene que ser 1, luego

   $$x(t)^2 + (y(t) - (-\cot(t)x(t) + y(t)))^2 = 1 \Rightarrow \frac{x(t)^2}{\sin(t)^2} = 1.$$

   De aquí concluimos $x(t) = \sin(t)$ (porque tiene que ser positivo al estar la curva a la derecha del eje y).

   Para hallar $y(t)$ sólo hay que darse cuenta que

   $$-\cot(t) = \text{pendiente} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y'(t)}{\cos(t)},$$

   luego

   $$y'(t) = -\frac{\cos(t)^2}{\sin(t)} = 1 - \frac{1}{\sin(t)}.$$

Integrando (usando el cambio de $u = \tan(t/2)$,

$$y(t) = t + \log(\tan(t/2))$$

y

$$\alpha(t) = (\sin(t), t + \log(\tan(t/2)).$$

2. La *catenaria*. Esta curva es la que adopta una curva suspendida entre dos puntos.

   Vamos a suponer que la curva se escribe $y = f(x)$. Ya que está suspendida, la única fuerza que actúa sobre la cuerda es el peso. El peso entre dos puntos de la cuerda es, salvo constante que depende de la densidad uniforme de la cuerda, la longitud de la cuerda entre esos dos puntos. Hallamos la longitud entre el punto $(0, f(0))$ y $(x, f(x))$:

   $$\int_0^x |\alpha'(x)|dx = \int_0^x \sqrt{1+f'^2}dx.$$

   Si la fuerza F actuando sobre la cuerda tiene dos componentes, vertical y horizontal, con

   $$F\cos\theta = c = ct, \quad F\sin\theta = g\int_0^x \sqrt{1+f'^2}dx.$$

   Por tanto,

   $$\text{pendiente} = \frac{y'(x)}{1} = \tan\theta = \frac{g}{c}\int_0^x \sqrt{1+f'^2}dx.$$

   Derivando

   $$y''(x) = a\sqrt{1+y'^2},\ a = \frac{g}{c}.$$

   Entonces

   $$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = a.$$

   Esta es una ecuación diferencia a resolver. Hacemos $z = y'$. Entonces

   $$\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = a.$$

   Esta ecuación es de variables separadas, o dicho de otra forma, basta con resolver

   $$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}dz = \int adx.$$

   $$mboxarc\sinh(z) = ax + b \Rightarrow z(x) = \sinh(ax+b) \Rightarrow y'(x) = \sinh(ax+b).$$

   Integrando de nuevo,

   $$y(x) = \frac{1}{a}\cosh(ax+b) + d,$$

   que es la curva que se buscaba.

2. Aproximación 'local' a ciertos problemas de curvaturas de curvas

Queremos incidir en la resolución de ciertos problemas locales de curvas mediante un estudio 'local' y más en el estilo de usar análisis diferencial.

El primero es hallar las curvas planas con curvatura constante no nula. Sabemos que una circunferencia de radio r tiene curvatura $\pm 1/r$. Veamos ahora el recíproco.

Teorema 2.1 *Si una curva plana tiene curvatura constante $c \neq 0$, entonces es una circunferencia de radio $1/|c|$.*

Precisamos el enunciado del resultado, ya que éste es 'local'. La curva dada es una aplicación $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$. Decir que es una circunferencia es decir que su traza está incluida en una circunferencia: la traza no tiene porqué completar una (o más curva) en la circunferencia, sino sólo un arco de la misma.

Demostración. Realizamos varias demostraciones (y aproximaciones) al problema, todas ellas diferentes e interesantes.

1. Podemos suponer que α está p.p.a. La motivación viene en que si tomamos una circunferencia de radio r, si en la recta normal en $\alpha(s)$ multiplicamos $N(s)$ por la curvatura, nos da el centro de la circunferencia (independientemente del sentido en el que se gira en la circunferencia (comprobar!)). Por tanto, definimos
$$f(s) = \alpha(s) + \frac{1}{c}N(s).$$
Esta aplicación es diferenciable (comprobar!) y su derivada es, usando las ecuaciones de Frenet:
$$f'(s) = T(s) + \frac{1}{s}N'(s) = T(s) + \frac{1}{c}(-\kappa(s)T(s)) = 0.$$
Como la derivada es cero, f es constante, es decir, existe $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(s) = p$ (la función f es vectorial. Esta igualdad se escribe
$$\alpha(s) + \frac{1}{c}N(s) = p \Rightarrow \alpha(s) - p = -\frac{1}{r}N(s),$$
luego tomando módulos, $|\alpha(s) - p| = 1/c^2$, es decir, $\alpha(s)$ se encuentra en la circunferencia centrada en p de radio $1/|c|$.

2. En esta demostración trabajamos con 'coordenadas'. Tomamos $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ y suponemos p.p.a. Por la definición de curvatura, $\alpha''(s) = cJ\alpha'(s)$, es decir, $(x'', y'') = c(-y', x')$, luego
$$x'' = -cy', \quad y'' = cx'.$$
Este es un sistema de ecuaciones diferenciales a resolver. Pero aquí simplemente integramos en s, obteniendo
$$x' = -cy + m, \quad y' = cx + n, \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado sabemos que $x'^2 + y'^2 = 1$ por estar p.p.a., luego $1 = (cy + m)^2 + (cx + n)^2$, que también se escribe como

$$(x + \frac{n}{c})^2 + (y + \frac{m}{c})^2 = \frac{1}{c^2},$$

es decir, las coordenadas (x, y) de la curva satisfacen la ecuación de una circunferencia de radio $1/|c|$ centrada en $(n/c, m/c)$.

3. Esta demostración es la misma que antes, pero imponiendo 'condiciones iniciales' en la resolución del sistema. Vamos a resolver el sistema para que salga una circunferencia centrada en el origen. Como sabemos que tendría que pasar por el punto $(1/c, 0)$, decimos: después de una reparametrización (esencialmente, cambiar s por $-s$ si es preciso) también suponemos que la curvatura c es positiva.

   El primer paso es *técnico* y permite simplificar las cuentas: *después de un movimiento rígido directo (giro+traslación) podemos suponer que* $\alpha(0) = (1/c, 0)$ *y que* $\alpha'(0) = (0, 1)$. Así nos aseguramos que la curva que va a salir es la circunferencia centrada en el origen de radio $1/c$ recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. Aquí $\alpha'(0) = (0, 1)$ porque α está p.p.a.

   El sistema ahora es el mismo que antes, es decir, $(x'', y'') = c(-y', x')$ pero con condiciones

   $$x(0) = 1/c, y(0) = 0, x'(0) = 0, y'(0) = 1.$$

   Deducimos
   $$x' = -cy + m, \quad y' = cx + m$$
   para ciertas constantes m, n. Pero sustituyendo las condiciones iniciales, tenemos $m = n = 0$. Por otro lado, sabemos que $x'^2 + y'^2 = 1$ por estar p.p.a., luego $c^2(x^2 + y^2) = 1$ o lo que es lo mismo, $x^2 + y^2 = 1/c^2$. Esto quiere decir que α está incluida dentro de una circunferencia de radio $1/c$ y centrada en el origen.

4. En esta demostración usamos 'análisis de una variable', es decir, tratamos a la curva como grafo $y = f(x)$ de una función. En tal caso, hay que recordar la ecuación de una circunferencia. Si ésta es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, entonces $y = y(x) = b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$, luego ésta es la función que tenemos que obtener.

   Recordando la curvatura de $y = f(x)$, la hipótesis nos dice:

   $$\frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}} = c.$$

   Resolvemos esta ecuación diferencial. Escribiendo $z = f'$, la ecuación es $z'/(1 + z^2)^{3/2} = c$, es decir,
   $$\int \frac{dz}{(1 + z^2)^{3/2}} = \int c\, dx \Rightarrow \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = cx + m.$$
   Despejamos z, y obtenemos

   $$z = f' = \pm \frac{cx + m}{\sqrt{1 - (cx + m)^2}}.$$

Suponemos el signo + (del mismo modo con el menos) e integramos respecto de x, haciendo un cambio de variable $u = cx + m$:

$$f(x) = \int f'(x)\ dx = \int \frac{cx+m}{\sqrt{1-(cx+m)^2}} dx = \frac{1}{c}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du + n = -\frac{1}{c}\sqrt{1-u^2} + n, \quad n \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$f(x) = n - \frac{1}{c}\sqrt{1-(cx+m)^2} = n - \sqrt{\frac{1}{c^2} - (x + \frac{m}{c})^2}$$

que era lo que había que probar.

El segundo problema que resolvemos es dar una interpretación geométrica al signo de la curvatura de una curva plana.

Teorema 2.2 *Sea α una curva regular en t_0. Si $\kappa(t_0) > 0$, entonces en un entorno alrededor de t_0, la traza de la curva se encuentra en el semiplano de $\mathbb{R}^2$ determinado por la recta tangente en t_0 donde apunta $N(t_0)$.*

De nuevo hacemos varias demostraciones. Previamente recordamos que si $p, v \in \mathbb{R}^2$, la recta que pasa por p y tiene como vector director v es $X = p + \lambda v$. Si w es un vector perpendicular a v, dicha recta se escribe $\{X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - p, w\rangle = 0\}$. Los dos semiplanos que determina dicha recta son $\{X \in \mathbb{R}^2 : \langle x - p, w > 0\}$ y $\{X \in \mathbb{R}^2 : \langle X - p, w\rangle < 0\}$, siendo el primero donde apunta w.

Demostración.

1. Motivado por la definición de semiplano, definimos

   $$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0)\rangle,$$

   donde estamos suponiendo que la curva está p.p.a. (que no cambia el problema). Entonces tenemos

   $$f(s_0) = 0,\ f'(s_0) = \langle \alpha'(s_0), N(s_0)\rangle = 0$$

   y usando la definición de curvatura,

   $$f''(s_0) = \langle \alpha''(s_0), N(s_0)\rangle = \kappa(s_0) > 0.$$

   Por tanto f tiene un mínimo local estricto en s_0, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $s \in (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$, $s \neq s_0$, $f(s) > 0$, como se quería probar.

2. Usamos 'coordenadas' y escribimos $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ y suponemos p.p.a. Empezamos con un apaño 'técnico': después de un movimiento rígido directo, suponemos que $\alpha(s_0) = (0,0)$ y $\alpha'(s_0) = (1,0)$. Por tanto $N(s_0) = J\alpha'(s_0) = (0,1)$ y la curvatura es

   $$\kappa(s_0) = x'(s_0)y''(s_0) - y'(s_0)x''(s_0) = y''(s_0).$$

   Por el convenio anterior, $y(s_0) = 0$, $y'(s_0) = 0$, y por hipótesis, $y''(s_0) > 0$. Esto quiere decir que $y = y(s)$ tiene un mínimo local estricto en 0, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $y(s) > 0$ para $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$, probando que la curva se encuentra localmente por encima de la recta $y = 0$ (que es la recta tangente en s_0) y es donde apunta $N(s_0) = (0,1)$.

3. Otra manera de hacer el ejercicio es considera que la curva es grafo de una función. La idea es reducir a un problema de funciones de una variable. La 'desventaja' es que la curva deja de estar parametrizada por el arco. Precisamos. De nuevo, hacemos un movimiento rígido con las mismas condiciones de antes. Simplificamos la notación con $s_0 = 0$. Como $x'(0) = 1$, entonces en un entorno de $\alpha(0)$, la curva es grafo de una función $y = f(x)$, luego parametrizamos como $\alpha(t) = (t, f(t))$. La curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

En $t = 0$, sabemos que $f(0) = f'(0) = 0$ y así $\kappa(0) = f''(0)$. Como este número es positivo, entonces f tiene un mínimo local estricto en $t = 0$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $0 = f(0) < f(t)$ para $t \in (-\delta, \delta)$, es decir, la curva se encuentra por encima de la recta $y = 0$, es decir, en el semiplano donde apunta $N(0)$: el vector tangente es $\alpha'(0) = (1, f'(0)) = (1, 0)$, luego $N(0) = J\alpha'(0) = J(1, 0) = (0, 1)$.

3. Unicidad en la teoría local de curvas

El teorema fundamental de curvas nos dice que dadas dos funciones continuas $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ con $\kappa \neq 0$, entonces existe una curva con curvatura κ y torsión τ. Además esta curva es única salvo movimientos rígidos directos. Un resultado análogo se tiene para curvas en $\mathbb{R}^2$.

La demostración de la unicidad es la siguiente. Si α y β son dos curvas con la misma curvatura y torsión, se toma $s_0 \in I$ y se toma una isometría lineal $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$A : T_\alpha(s_0) \longmapsto T_\beta(s_0).$$

$$A : N_\alpha(s_0) \longmapsto N_\beta(s_0).$$

$$A : B_\alpha(s_0) \longmapsto B_\beta(s_0).$$

En particular, A es directa. Se considera la curva $A \circ \alpha$ y se traslada hasta hacerla coincidir con β en s_0, es decir, se define el movimiento $Mx = Ax + b$, donde $b = \beta(s_0) - A\alpha(s_0)$. Se considera la curva $\gamma = M \circ \alpha$ y el objetivo es probar que γ coincide con β. La curvatura y torsión de γ es la de α y β. Además, por ser el movimiento rígido directo, ya se probó en clase que el triedro de Frenet de γ es aplicar A al triedro de Frenet de α en el punto correspondiente. En particular, los triedros coinciden *en el punto* $s = s_0$ (*).

Se define la función

$$f(s) = |T_\gamma(s) - T_\alpha(s)|^2 + |N_\gamma(s) - N_\alpha(s)|^2 + |B_\gamma(s) - B_\alpha(s)|^2.$$

Usando que las curvaturas y torsiones de α y γ coinciden, entonces $f' = 0$. Por tanto f es constante. Pero en el punto $s = s_0$, $f(s_0) = 0$ por (*). Por tanto $f = 0$, en particular, $T_\gamma - T_\alpha = 0$, es decir, $\gamma' - \alpha' = 0$, luego γ y α difieren en una constante. Al evaluar en s_0, ambas curvas coinciden, luego la constante es el vector 0: esto era justamente lo que había que probar.

Como consecuencia de la demostración, tenemos: *Si dos curvas $\alpha, \beta : I\mathbb{R}^3$ p.p.a. tienen la misma curvatura y torsión, y en un punto $s = s_0$, $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ y los triedros de Frenet en s_0 coinciden, entonces $\alpha = \beta$.* Para curvas planar, la condición de los triedros se pasa a bases de los diedros de

Frenet, pero como el vector normal es girar el vector tangente, basta con que los vectores tangentes coincidan.

Aplicamos el resultado anterior para probar los dos siguientes resultados.

1. *Si $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\alpha(-s)$ para cada $s \in (-a, a)$, entonces la traza de α es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.*

   Se define $\beta(s) = A\alpha(-s)$, donde A es la simetría respecto de la recta normal L en 0. Ya que A es inverso y estamos cambiando s por $-s$, se tiene $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(-s)$. Por hipótesis, $\kappa_\alpha(-s) = -\kappa_\alpha(s)$, luego la curvatura de α y β coinciden. Por otro lado, en $s = 0$, tenemos $\beta(0) = A\alpha(0) = \alpha(0)$ ya que $\alpha(0)$ está contenido en L. También sabemos $\beta'(0) = -A\alpha'(0) = \alpha'(0)$, pues $A\alpha'(0) = -\alpha'(0)$. Por tanto tenemos $\beta = \alpha$, que era justamente lo que se quería probar.

2. *Si $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\alpha(-s)$ para cada $s \in (-a, a)$, entonces la traza de α es simétrica respecto de la recta normal de α en 0.*

   Se considera A la simetría respecto del punto $\alpha(s_0)$, es decir, $A(p) = 2\alpha(s_0) - p$, que es un movimiento directo. Se define la curva $\beta(s) = A\alpha(-s)$. Entonces $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(-s)$ por ser A directo, y por hipótesis, tenemos

   $$\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(-s) = \kappa_\alpha(s).$$

   Por tanto β y α difieren en un movimiento directo. Pero

   $$\beta(0) = A\alpha(s_0) = \alpha(0), \quad \beta'(0) = \alpha'(0),$$

   luego las curvas son iguales. Pero la igualdad $A\alpha(-s) = \alpha(s)$ dice que la traza de α es simétrica respecto de $\alpha(0)$. El ejercicio se podía simplificar un poco si hacemos una traslación –que no cambia el problema– y suponer que $\alpha(0)$ es el origen, luego $A(p) = -p$.

4. Triedro y curvatura y torsión de una curva no parametrizada por el arco

Nos preguntamos si es posible definir la curvatura y torsión de una curva que no está parametrizada por el arco. En tal caso, dichas definiciones deberían *extender* las que ya se tienen cuando la curva está p.p.a. La manera más simple es la siguiente: supongamos que α no está p.p.a.; la reparametrizamos por el arco como $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ y esta curva tiene definida su triedro de Frenet, su curvatura y su torsión. Entonces nuestra definición sería que el triedro de Frenet, curvatura y torsión de α en t sería el triedro, curvatura y torsión de la curva β en s, donde s el único número tal que $\phi(s) = t$.

Para que esto sea válido, deberíamos de probar que *no de depende de la reparametrización por arco β*. En primer lugar tenemos que recordar que si una curva está p.p.a, y reparametrizamos por el arco pero cambiando la orientación, entonces la torsión cambia de signo. Por tanto, vamos a imponer desde el principio que la reparametrización el arco de α tiene que conservar la orientación.

Empezamos pues con considerar $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ una reparametrización por el arco de α con $\phi' > 0$. Entonces $\beta' = \phi'\alpha'$ y como $\phi' > 0$, tenemos

$$\phi' = \frac{1}{|\alpha'|}.$$

Aquí el símbolo $'$ en β quiere decir la derivada respecto de s, y en *alpha*, la derivada respecto de t. De aquí concluimos

$$T_\beta = \frac{1}{|\alpha'|}\alpha'.$$

Como en el lado derecho no depende de ϕ, tenemos que el vector tangente a α es $\alpha'/|\alpha'|$.

La curvatura de β se obtiene de la acelaración:

$$\beta'' = \phi''\alpha' + \phi'^2\alpha''.$$

Por tanto

$$\kappa_\beta^2 = \phi''^2|\alpha'|^2 + \phi'^4|\alpha''|^2 + 2\phi'^2\phi''\langle\alpha', \alpha''\rangle.$$

Sólo nos queda hallar ϕ''. Como $\phi'^2\langle\alpha', \alpha'\rangle = 1$, derivando respecto de s, tenemos

$$2\phi'\phi''|\alpha'|^2 + 2\phi'^3\langle\alpha'', \alpha'\rangle = 0 \Rightarrow \phi'' = -\frac{\langle\alpha'', \alpha'\rangle}{|\alpha'|^4}.$$

Sustituyendo en κ_β tenemos

$$\kappa_\beta^2 = \frac{\langle\alpha', \alpha''\rangle^2}{|\alpha'|^6} + \frac{|\alpha''|^2}{|\alpha'|^4} - 2\frac{\langle\alpha', \alpha''\rangle^2}{|\alpha'|^6} = \frac{|\alpha'|^|\alpha''|^2 - \langle\alpha', \alpha''\rangle^2}{|\alpha'|^6} = \frac{|\alpha' \times \alpha''|^2}{|\alpha'|^6},$$

Como el lado derecho no depende de ϕ, definimos

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}.$$

Además el vector normal de β es

$$N_\beta = \beta''/\kappa_\beta = \frac{|\alpha'|^3}{|\alpha' \times \alpha''|}(-\frac{\langle\alpha'', \alpha'\rangle}{|\alpha'|^4}\alpha' + \frac{\alpha''}{|\alpha'|^2}).$$

Para la torsión de β, tenemos $\tau_\beta = \langle N_\beta', B_\beta\rangle$. Observemos que

$$B_\beta = T_\beta \times N_\beta = \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \times \left(\frac{|\alpha'|^3}{|\alpha' \times \alpha''|}(-\frac{\langle\alpha'', \alpha'\rangle}{|\alpha'|^4}\alpha' + \frac{\alpha''}{|\alpha'|^2})\right) = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}.$$

Por tanto, para hallar la torsión, al derivar la expresión de N_β *sólo* hay que derivar el sumando que lleva α'', luego

$$\tau_\beta = \frac{|\alpha'|}{|\alpha' \times \alpha''|}\langle\phi'\alpha''', \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}\rangle = \frac{det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2},$$

que tampoco depende de ϕ.

Finalmente, para el triedro de Frenet de α, hemos observado que la expresión del binormal es simple, luego $N_\alpha = B_\alpha \times T_\alpha$. Como sabemos también que tiene módulo 1, entonces N_β es $(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'$ dividido por su módulo.

Resumimos lo obtenido del siguiente modo:

Sea α una curva no necesariamente p.p.a. Entonces su curvatura y torsión es

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \quad \tau_\alpha(t) = \frac{det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2},$$

y el triedo de Frenet es

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'}{|\alpha'}, \; N_\alpha(t) = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{|(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'|}, \; B_\alpha(t) = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}$$