Curvas y Superficies. Examen del tema 4
– Grado en Matemáticas –
Curso 2015/16

Nombre:

1. Sea $\lambda > 0$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(p) = \lambda p$ y S una superficie. Si α es una geodésica de S, estudiar si $f \circ \alpha$ es una geodésica de $f(S)$.
2. Hallar la curvatura geodésica de la intersección del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ con el plano de ecuación $x = \sqrt{3}$.
3. Sean $\alpha, \beta : I = (a, b) \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ dos curvas regulares y embebidas Estudiar si las superficies $\alpha(I) \times \mathbb{R}$ y $\beta(I) \times \mathbb{R}$ son isométricas.
4. Probar la desigualdad triangular de la función distancia en una superficie.

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. Sea $S' = f(S)$. Sabemos que $T_{f(p)}(S') = df_p(T_pS)$. Como f es lineal, $df_p(T_pS) = \lambda T_pS = T_pS$. Por tanto $N'(f(p)) = N(p)$. Como $\alpha''(s)$ es proporcional a $N(\alpha(s))$ por ser geodésica en S, y $N'(f\alpha(s)) = N(\alpha(s))$, entonces $(f \circ \alpha)''(s) = \lambda\alpha''(s)$ también es proporcional a $N'(f(\alpha(s)))$, luego es geodésica en S'.

2. La parametrización de la curva es $\alpha(t) = (\sqrt{3}, 2\sinh(t), 2\cosh(t))$. El normal a la superficie es $\nabla f/|\nabla f|$ donde f define al hiperboloide: $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$. Por tanto $N(x,y,z) = (x,y,-z)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Entonces $N(t) = (\sqrt{3}, 2\sinh(t), 2\cosh(t))/\sqrt{3+4\cosh(}$
Entonces

$$\kappa_g(t) = \frac{det(\alpha'', \alpha', N(\alpha))}{|\alpha'|^3} = \frac{4\sqrt{3}\sinh^2(t) - 4\sqrt{3}\cosh^2(t)}{\left(4\sinh^2(t) + 4\cosh^2(t)\right)^{3/2}\sqrt{4\sinh^2(t) + 4\cosh^2(t) + 3}}.$$

3. Tomamos parametrizaciones $X(s,t) = (\alpha(s), t)$ e $Y(s,t) = (\beta(s), t)$. Reparametrizamos α y β por el arco, cambiando los dominios de ambas curvas, que denotamos por I y J. Hacemos una traslación en el parámetro de una de las curvas del tipo $s \mapsto s + ct$. para que $I \cap J$ sea no vacío y de longitud lo más grande posible. Entonces los coeficientes de la primera forma fundamental en $(I \cap J) \times \mathbb{R}$ de X e Y coinciden, a saber, $E = G = 1$, $F = 0$. Como X e Y son homeomorfismos en su imagen, entonces $X((I \cap J) \times \mathbb{R})$ es isométrico a $Y((I \cap J) \times \mathbb{R})$.

4. Sean $p, q, r \in S$ y probamos que $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$. De entre todas las curvas que unen p con q se encuentran las que se forman al tomar una que une p con r *seguida* de otra que une r con q. Una parametrización sería: si α y β son sendas curvas parametrizadas en $[0,1]$, entonces la continuación de α seguida con la de β, que denotamos por $\alpha * \beta$, es

$$(\alpha * \beta) : t \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

   Es evidente por la definición de longitud que $L(\alpha * \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$.

   Fijemos β, y tomamos todas las curvas α del tipo anterior. Entonces $d(p,q) \leq L(\alpha * \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$, y tomando ínfimos en α, conseguimos $d(p,q) \leq d(p,r) + L(\beta)$. Haciendo variar β y tomando ínfimos en todas las curvas que unen r con q, conseguimos $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.