Curvas y Superficies. Examen del tema 2

– Grado en Matemáticas –

Curso 2015/16

Nombre:

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular embebida en el plano $P = \{z = 0\}$. Probar el conjunto S de todas las rectas perpendiculares a P que pasan por los puntos de la traza de α es una superficie. Probar que los planos tangentes son perpendiculares a P.

2. Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas con $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Demostrar que existe una misma recta que corta perpendicularmente en al menos en un punto de S_1 y en al menos en un punto de S_2.

3. Probar que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie. Hallar los puntos $p \in S$ tales que T_pS es perpendicular a p. Probar que no existe ningún punto p tal que $p \in T_pS$.

4. Probar que si A es un conjunto abierto de una superficie, entonces es una superficie. Deducir que toda componente conexa de una superficie compacta es una superficie compacta.

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. Sea $a = (0, 0, 1)$. Entonces $S = \{\alpha(t) + sa : t \in I, s \in \mathbb{R}\}$. Veamos que $X : I \times \mathbb{R} \to V = S$ es una parametrización que recubre a todo S. Observemos que $\alpha'(t) \in P$ para todo $t \in I$.

   La aplicación es diferenciable vista en $\mathbb{R}^3$ pues es suma de las funciones vectoriales diferenciables $(t, s) \mapsto \alpha(t)$ y $(t, s) \mapsto sa$. Las parciales son $X_t = \alpha'(t)$ y $X_s = a$, que son linealmente independientes pues $\alpha'(t)$ está en el plano P que es perpendicular a a. Veamos que X es un homeomorfismo. Si $p \in S$, tenemos que hallar (t, s) con $p = \alpha(t) + sa$. Multiplicando por a, tenemos $s = \langle p, a\rangle$ pues α es perpendicular a a. Por tanto, $\alpha(t) = p - \langle p, a\rangle a$, luego $t = \alpha^{-1}(p - \langle p, a\rangle a)$ (aquí usamos que α es embebimiento). Concluimos que

   $$X^{-1}(p) = (\alpha^{-1}(p - \langle p, a\rangle a), \langle p, a\rangle).$$

   Esto prueba que X es biyectiva y que X^{-1} es continua (X ya lo era por ser diferenciable).

   Para el segundo apartado, sabemos que el plano tangente en $X(t, s)$ está generado por X_t y X_s, es decir, por $\{\alpha'(t), a\}$. Luego el plano tangente $T_{X(t,s)}S$ es perpendicular a P si sendos vectores ortogonales a ambos planos son perpendiculares. En nuestro caso, $X_t \times X_s$ y a, respectivamente. Pero $\langle X_t \times X_s, a\rangle = \langle \alpha'(t) \times a, a\rangle = 0$.

2. La función $S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$, $(p, q) \mapsto |p - q|^2$ es continua y definida en un compacto (producto de compactos), luego existe un mínimo (p_0, q_0). Veamos que la recta que une p_0 con q_0 es la pedida (es una recta ya que $p_0 \neq q_0$ pues $S_1 \cap S_2 = \emptyset$).

   Sea $f : S_2 \to \mathbb{R}$, $f(q) = |q - p_0|^2$. Esta función tiene un mínimos en q_0 y como es diferenciable, q_0 es un punto crítico de f, es decir, $2\langle v, q_0 - p_0\rangle = 0$ para todo vector $v \in T_{q_0}S_2$. Luego la recta que une p_0 con q_0 es perpendicular a $T_{q_0}S_2$.

   Para el punto p_0 el razonamiento es análogo.

3. El conjunto S es una superficie a ser imagen inversa de un valor regular de cierta aplicación. Concretamente, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^2 + z^2$. Hallamos los puntos críticos: $f_x = 4x(x^2 + y^2)$, $f_y = 4y(x^2 + y^2)$, $f_z = 2z$. Si $f_x = f_y = f_z = 0$, entonces $z = 0$ y $x(x^2 + y^2) = y(x^2 + y^2) = 0$. Si $x^2 + y^2 \neq 0$, entonces $x = y = 0$, una contradicción. Por tanto, $x^2 + y^2 = 0$, es decir, $x = y = 0$. Luego el único punto crítico es $(0, 0, 0)$, y así el único valor que no es regular es $f(0, 0, 0) = 0$. Por tanto $a = 1$ es regular y $S = f^{-1}(\{1\})$ es una superficie.

Se sabe el plano tangente en $p = (x, y, z)$ es

$$T_pS =< \nabla f(p) >^{\perp}=< (x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2)y, z) >^{\perp} .$$

Por tanto, p es perpendicular a T_pS si es proporcional a $\nabla f(p)$, es decir, si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2)y, z) = \lambda(x, y, z).$$

De la última ecuación, λ debe ser 1, luego, $x(x^2 + y^2) = x$, $y = y(x^2 + y^2)$. Si $x^2+y^2 = 0$, es decir, $x = y = 0$ (y de S, $z = \pm 1$), son ciertas ambas ecuaciones, luego para los puntos $(0, 0, \pm 1)$ se da la propiedad. Si $x^2 + y^2 \neq 0$, entonces simplificando de $x(x^2 + y^2) = x$, $y = y(x^2 + y^2)$, tenemos $x = y = 0$: contradicción. La respuesta es que los únicos puntos con la propiedad son $(0, 0, \pm 1)$.

Si $p \in T_pS$, entonces $\langle p, \nabla f(p)\rangle = 0$, obteniendo, $x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + z^2 = 0$, es decir, $(x^2 + y^2)^2 + z^2 = 0$, lo cual no es posible, pues el miembro de la derecha de esta ecuación es 1 por la definición de S.

4. Veamos las tres propiedades de superficie para el conjunto A. Sea $p \in A$. Como $p \in S$ y S es una superficie, existe una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$. Entonces la parametrización que buscamos para p en A es: si $W = V \cap A$ y $U' = X^{-1}(W)$, definimos

$$X_{|U'} : U' \to W \subset A.$$

El conjunto W es abierto en A porque es la interseción de un abierto de S (a saber, V) con A. El conjunto U' es un abierto de $\mathbb{R}^2$, porque $X : U \to V$ es un homeomorfismo y W es un abierto de S (intersección de dos abiertos –aquí se usa que A es abierto–), luego $X^{-1}(W)$ es un abierto de U, y U es abierto en $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, $X_{|U'} : U' \to W$ es un homeomorfismo al ser la restricción del homeomorfismo X a U' y su imagen.

Por otro lado, la diferenciabilidad de $X_{|U'}$ en U' y el hecho de que el grado de la derivada es 2 se satisfacen porque son cuestiones locales, que ya satisfacía X.

Para la segunda parte, sea A una componente conexa de una superficie compacta S. El conjunto A es abierto, porque dado $p \in A$, existe un abierto V de p en S que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, luego V es conexo, y así contenido en la componente de p, es decir, $p \in V \subset A$. Ahora se aplica el apartado anterior para deducir que A es una superficie. Para la compacidad, se sabe que S es cerrado y acotado. Como toda componente es cerrada, entonces es cerrado en S, que es cerrado en $\mathbb{R}^3$, luego A cerrado en $\mathbb{R}^3$. Y como A está incluido en un conjunto acotado, a saber, S, es acotado.