Curvas y Superficies. Examen del tema 1
– Grado en Matemáticas –
Curso 2015/16

Nombre:

1. Se considera una circunferencia C de radio 1 apoyada sobre el eje de abcisas de $\mathbb{R}^2$ en el punto $O = (0,0)$. Sea $A = (0,2) \in C$ y L la recta tangente a C en A. Si P es un punto de C, la recta que pasa por O y P interseca a L en un punto Q. La recta perpendicular a L por Q y la horizontal por P, determinan un punto M. Se define la curva llamada 'bruja de Agnesi' como el lugar geométrico de los puntos M cuando P recorre la circunferencia C. Parametrizar la bruja de Agnesi (figura 1).

2. Sea $\alpha : (-a,a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\alpha(-s)$ para cada $s \in (-a,a)$. Probar que la traza de α es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva con $\tau(s) \neq 0$. Probar que κ/τ es constante si y sólo si las rectas tangentes hacen un ángulo constante con una dirección fija.

4. Reparametrizar por el arco $\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar la curvatura y diedro de Frenet en cada punto.

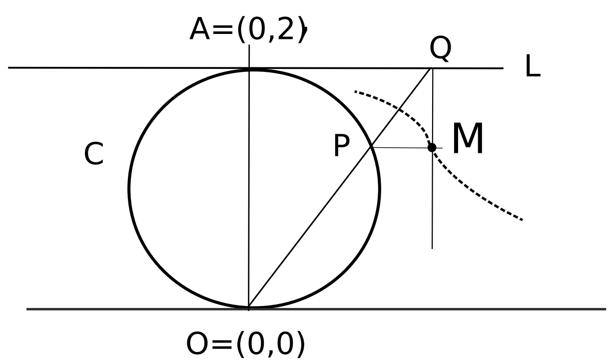

Figure 1: Bruja de Agnesi

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. Dos maneras diferentes para parametrizar.

   (a) Desde O se traza la recta que pasa por $P \in C$ con pendiente $\tan\theta$. Esta recta tiene ecuación $y = \tan\theta$ y corta a L en el punto Q que tiene ordenada 2, luego $2 = \tan\theta x$. La abcisa de este punto es la de M. Para la ordenada de M, observamos que es la misma que la de Q. La circunferencia C tiene ecuación $x^2 + (y-1)^2 = 1$, luego al intersecar con la recta $y = \tan\theta x$, tenemos $\tan\theta^2 y^2 + (y-1)^2 = 1$, es decir, $y = 2\sin^2\theta$. Por tanto la curva se parametriza como
   $$\alpha(\theta) = (\frac{2}{\tan\theta}, 2\sin^2\theta),\ \theta \in (0,\pi).$$
   La recta tangente $\alpha'(\theta)$ será horizontal si su ordenada es 0. La derivada de la ordenada es $2\sin\theta\cos\theta$. Entonces $2\sin\theta\cos\theta = 0$ sii $\cos\theta = 0$, es decir, $\theta = \pi/2$ (que se corresponde con $\alpha(\pi/2) = (0,2)$.

   (b) Parametrizamos cada punto $P \in C$ como $\beta(\theta) = (\cos\theta, 1+\sin\theta)$. La ordenada de M es la de P, es decir, $1 + \sin\theta$. La recta que pasa por O y P es de la forma $\lambda\beta(\theta)$. El punto Q se obtiene cuando la ordenada es 2, es decir, $2 = \lambda(1 + \sin\theta)$. Luego la abcisa de Q (que es la misma que M) es $\lambda\cos\theta$, es decir, $\cos\theta(2/(1 + \sin\theta))$. Entonces
   $$\alpha(\theta) = (\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}, 1 + \sin\theta),\ \theta \in (-\pi/2, 3\pi/2).$$
   Para la segunda parte, el argumento es el mismo: la derivada de la ordenada de α es $\cos\theta$. Luego el punto es buscado sii $\cos\theta = 0$, es decir, $\theta = \pi/2$, y de nuevo $\alpha(\pi/2) = (0,2)$.

2. Despues de una traslación podemos suponer que $\alpha(0)$ es el origen $O = (0,0)$: las traslaciones son movimientos directos, luego no cambia la curvatura de una curva. La simetría respecto de O está dada por $S(p) = -p$ ($p \in \mathbb{R}^2$). Nos están preguntado que $R(\alpha(s))$ está en la traza de α, es decir, para cada $s \in I = (-a,a)$, existe $t \in I$ tal que $(\alpha(s)) = \alpha(t)$.

   Sea $\beta(s) = R\alpha(-s) = -\alpha(-s)$. Como R es un movimiento directo, la curvatura no cambia. Y la reparametrización $s \to -s$, cambia la curvatura de signo (ambas hechos probados en clase). Por tanto, $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s)$. Usando la hipótesis del ejercicio, tenemos $\kappa_\beta(s) = \kappa_\alpha(s)$ para todo $s \in I$. Por tanto, existe un movimiento directo $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = M \circ \alpha$. Sin embargo,

$$\beta(0) = R(\alpha(0)) = R(O) = \alpha(0), \quad \beta'(0) = \alpha'(0),$$

luego $N_\beta(0) = N_\alpha(0)$. Como β y α coinciden en $s = 0$ y también el diedro de Frenet, la unicidad del teorema fundamental de curvas nos dice que M es la identidad, probando el ejercicio.

3. $\Leftarrow$) Sea $v \in \mathbb{R}^3$, que podemos suponer de módulo 1, que nos da la dirección fija, es decir, $\langle T(s), v\rangle = \cos\theta = ct$. Derivando respecto de s y usando la primera ecuación de Frenet, tenemos $\kappa\langle N, v\rangle = 0$. Ya que $v = \langle v, T(s)\rangle T(s) + \langle v, B(s)\rangle B(s)$, y v tiene módulo 1, entonces $v = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$.Como $\kappa \neq 0$, entonces $\langle N, v\rangle = 0$. Derivando de nuevo, $-\kappa\langle T, v\rangle + \tau\langle N, v\rangle = 0$. Esta igualdad la escribimos $-\kappa\cos\theta + \tau\sin\theta = 0$, concluyendo que $\kappa/\tau = -\sin\theta/\cos\theta$, que es constante.

   $\Rightarrow$) Sea $\kappa = a\tau$, $a \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$). La implicación anterior permite definir el siguiente vector ¡que depende de s!:

   $$v(s) = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s),$$

   donde escribimos $a = \sin\theta/\cos\theta$. En principio, $v(s)$ va cambiando, pero vamos a probar que no es así, sino que es constante, es decir, $v(s) = v$. Si vemos esto, y como v es de módulo 1, se deduce que $\langle v, T(s)\rangle = \cos\theta$, que es constante.

   Finalmente,
   $$v'(s) = \kappa\cos\theta N - \sin\theta\tau N = \cos\theta(\kappa - a\tau)N = 0.$$

4. Derivando,

   $$\alpha'(t) = e^t(\cos t, \sin t) + e^t(-\sin t, \cos t) \Rightarrow |\alpha'(t)|^2 = 2e^{2t}.$$

   Entonces
   $$S(t) = \int_0^t 2e^{2u}\, du = e^{2t} - 1 := s \Rightarrow t = \log(1+s)/2.$$

   Por la reparametrización es

   $$\beta(s) = \alpha(\log(1+s)/2) = (1+s)(\cos(\log(1+s)/2), \sin(\log(1+s)/2)).$$

   La curvatura es
   $$\kappa(t) = \frac{det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{2e^{2t}}{2\sqrt{2}e^{3t}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}.$$

El diedro de Frenet es

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t - \sin t, -\sin t + \cos t).$$

$$N(t) = JT(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t - \cos t, \cos t - \sin t).$$