Curvas y Superficies. Examen de junio
– Grado en Matemáticas –
Grupo 2°-B. Curso 2015/16

Nombre:

1. Hallar la curvatura de la curva intersección del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ con el plano $x = 0$ y comparar los triedros de Frenet y de Darboux.
2. Sea $\alpha : I \to \mathbb{S}^2$ una curva p.p.a. y embebida. Probar que $S = \{t\alpha(s) : t > 0, s \in I\}$ es una superficie. Probar que S es minimal si y sólo si α es una geodésica de $\mathbb{S}^2$.
3. Sean S_1 y S_2 son dos superficies que se intersecan transversalmente en una curva regular C que es línea de curvatura de S_1. Probar que si S_1 y S_2 forman ángulo constante a lo largo de C, entonces C es una línea de curvatura de S_2.
4. En una superficie de revolución, probar que i) las rectas normales intersecan el eje de revolución y ii) que las rectas normales a lo largo de un meridiano son paralelas a un plano fijo.

Importante: razonar todas las respuestas

Soluciones

1. Haciendo $x = 0$, queda $y^2 - z^2 = -1$, luego una parametrización de la curva es $\alpha(t) = (0, \sinh(t), \cosh(t))$. Entonces $\alpha'(t) = (0, \cosh(t), \sinh(t))$ y $\alpha''(t) = \alpha(t)$. Así $\alpha' \times \alpha'' = (1, 0, 0)$, luego
$$\kappa(t) = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \frac{1}{(\sqrt{\cosh(t)^2 + \sinh(t)^2})^3}.$$
El binormal es $\alpha' \times \alpha''$ entre su módulo, luego $b(t) = (1, 0, 0)$ luego $n(t) = b(t) \times \alpha'(t) = (0, -\sinh(t), \cosh(t))/\sqrt{\cosh(t)^2 + \sinh(t)^2}$. El vector tangente es $T(t) = \alpha'/|\alpha'| = (0, \cosh(t), \sinh(t))/\sqrt{\cosh$
Para el triedro de Darboux, hallamos el normal a la superficie. Como es inversa de un valor regular, $N = \nabla f/|\nabla f|$, es decir, $N(x, y, z) = (x, y, -z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Por tanto, $N(t) = N(\alpha(t)) = (0, \cosh(t), -\sinh(t))/\sqrt{\cosh(t)^2 + \sinh(t)^2}$, que coincide con $n(t)$. Por tanto, $B(t) = b(t) = (1, 0, 0)$. Los triedros de Darboux son iguales. [la superficie es de revolución con eje z. Al hacer $x = 0$, se tiene un meridiano que se sabe que se una geodésica, luego los triedros son iguales].

2. Se toma $X(s, t) = t\alpha(s)$ definida de $U = I \times \mathbb{R}^+$ a $V = S$, que es abierto en S. Esta aplicación en $\mathbb{R}^3$ es diferenciable y tiene inversa en V: si $p \in V$, hay que hallar (s, t) tal que $t\alpha(s) = p$. Tomando módulos, $t = |p|$, luego $s = \alpha^{-1}(p/|p|)$. Entonces $X^{-1}(p) = (\alpha^{-1}(p/|p|), |p|)$. Como $X_s = t\alpha'$ y $X_t = \alpha$, serán independientes si lo son $\alpha(s)$ y $\alpha'(s)$. Como α está en $\mathbb{S}^2$, $|\alpha|^2 = 1$, luego al derivar, $\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$, luego perpendiculares y a?si, independientes.
Hallamos H. Como $X_{tt} = 0$ y $F = \langle X_s, X_t \rangle = 0$, entonces $H = 0$ sii $det(X_s, X_t, X_{ss}) = 0$, es decir, $det(t\alpha', \alpha, t\alpha'') = 0$. Como $t \neq 0$, S es minimal sii $det(\alpha, \alpha', \alpha'') = 0$. Se sabe que α es geodésica sii $n(s) = N(s)$. En $\mathbb{S}^2$, y salvo un signo, $N(s) = \alpha(s)$ y $n(s) = \alpha''(s)$. Por tanto, el anterior determinante es 0.
Para el recíproco, sabemos que $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ y derivado, α'' es perpendicular a α'. Si el determinante es 0, entonces $\langle \alpha \times \alpha', \alpha'' \rangle = 0$. Esto quiere decir que α'' pertenece al plano generado por α y α'. Pero estos vectores son perpendiculares y α'' lo es a α', luego es proporcional a $\alpha(s) = N(\alpha(s))$, como se quería probar.

3. Como $\langle N_1(\alpha(s)), N_2(\alpha(s)) \rangle = ct$, al derivar, $\langle N_1'(s), N_2(s) \rangle + \langle N_1(s), N_2'(s) \rangle = 0$. Como α es línea de curvatura de S_1, $N_1'(s) = \lambda\alpha'(s)$, luego es tangente a la curva. Como $N_2(\alpha(s))$ es perpendicular a ella, entonces, el primer sumando anterior es 0. Queda pues $\langle N_1(s), N_2'(s) \rangle = 0$. También se sabe que $N_2'(s)$ es perpendicular a N_2. Pero el vector $\alpha'(s)$ también es perpendicular a $N_1(s)$ y a $N_2(s))$, luego $N_2'(s)$ es proporcional a α', es decir, es línea de curvatura de S_2.

4. Parametrizamos la superficie como $X(t, \theta) = (f(t) \cos\theta, f(t) \sin\theta, g(t))$ y suponemos, sin perder generalidad, que la curva generatriz está p.p.a, es decir, $f'^2 + g'^2 = 1$.

(a) El vector N es proporcional a $X_t \times X_\theta$, es decir, a $(-g' \cos\theta, -g' \sin\theta, f')$. La recta normal es $\{X(t,\theta) + \lambda(-g' \cos\theta, -g' \sin\theta, f') : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Aquí t y θ son fijos. Cortará al eje z si existe λ tal que

$$f \cos\theta - \lambda g' \cos\theta = 0, f \sin\theta - \lambda g' \sin\theta = 0.$$

Es evidente que $\lambda = f(t)/g'(t)$ es una solución (salvo cuando $g'(t) = 0$, que la recta es paralela al eje z).

(b) Tomamos el meridiano θ_0. Los vectores directores de las rectas normales son $\{(-g'(t) \cos\theta_0, -g'(t) \sin\theta_0, f'(t)) : t \in I\}$. Es evidente que el vector $(\sin\theta_0, -\cos\theta_0, 0)$ es perpendicular a todos ellos. Por tanto, los vectores directores se encuentra en el plano $< (\sin\theta_0, -\cos\theta_0, 0) >^\perp$.