Relación de ejercicios del tema 4

Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas
Grupo: 2^0-B
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Si f es una homotecia de $\mathbb{R}^3$, S una superficie y α una geodésica de S, estudiar si $f \circ \alpha$ es una geodésica de $f(S)$.

2. En la esfera $\mathbb{S}^2$, hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica del paralelo $\mathbb{S}^2 \cap \{z = ct\}$.

3. En el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de la hélice $\alpha(t) = (r\cos(t), r\sin(t), at)$, $a \in \mathbb{R}$. Estudiar el caso $a = 0$.

4. Estudiar si la intersección de la superficie $z = xy$ con los planos $x = ct$ e $y = ct$ son geodésicas. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de la curva $\alpha(t) = (t, t, t^2)$.

5. Probar que en una superficie de revolución, los meridianos son geodésicas y que los paralelos cuya recta tangente es paralela al eje de revolución también son geodésicas.

6. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de un paralelo de una superficie de revolución.

7. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de un meridiano de una superficie de revolución.

8. Se consideran el helicoide H dado por $X(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y la catenoide C definida por $Y(u, v) = (\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), u)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$. Probar que la aplicación $\phi : H \to C$, $\phi = Y \circ F \circ X^{-1}$, donde $F(u, v) = (\operatorname{arc\,sinh}(u), v)$ es una isometría local.

9. Hallar la curvatura normal, geodésica y torsión geodésica de la intersección de la superficie $z = x^2 - y^2$ con el plano $y = 0$. Lo mismo para la curva $\alpha(t) = (t, t, 0)$.

10. Se consideran las aplicaciones $X(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), \log(u))$, $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$ e $Y(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Sean $S = X(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi))$ y $\bar{S} = Y(\mathbb{R}^2)$. Probar que S y $\bar{S}$ son superficies y que X e Y son parametrizaciones de cada una de ellas. Probar que $\phi : S \to \bar{S}$, $\phi = Y \circ X^{-1}$ no es una isometría local pero $K = \bar{K} \circ \phi$.

11. Sea $\alpha : I = (a, b) \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ una curva regular que es un embebimiento y $S = \alpha(I) \times \mathbb{R}$. Probar que es isométrica a un plano y hallar sus geodésicas. Deducir que la superficie $x = y^2$ es isométrica a un plano.

12. Probar que el cono S de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, $z > 0$ es localmente isométrico a un plano. Definir una isometría de S menos un meridiano en un abierto de un plano. Deducir las geodésicas de S.

13. Generalizar el ejercicio anterior para una superficie de revolución generada por una recta. Probar que es localmente isométrica a un plano.

14. Hallar la curvatura geodésica de cada una de las intersecciones del hiperboloide reglado $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ con los planos coordenados.

15. Hallar la curvatura geodésica de la intersección del hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ con el plano de ecuación $x = \sqrt{3}$.

16. Si dos geodésicas en una superficie son tangentes en un punto en común, probar que una es una reparametrización de la otra.

17. Si α es una curva regular en $\mathbb{R}^3$, estudiar si α es una geodésica en la superficie (parametrizada) tangente $X(s, t) = \alpha(s) + t\alpha'(s)$.

18. Si una recta está contenida en una superficie, probar que es una geodésica y una línea asintótica.

19. Si α es una geodésica de una superficie con $\sigma_{\alpha(s)}(\alpha'(s), \alpha'(s)) = 0$ para todo s, probar que α es una recta.

20. Probar que si todas las geodésicas de una superficie son curvas planas, entonces la superficie es un abierto de un plano o de una esfera.

21. Sean S y S' dos superficies que se intersecan en una curva regular α de forma que S y S' son tangentes a lo largo de α. Si se orientan ambas superficies para que las orientaciones coincidan en los puntos de $\alpha(I)$, probar que las curvaturas geodésicas de α para S y S' coinciden. En particular, α es una geodésica para S sii lo es para S'.

22. Demostrar que un difeomorfismo $f : S \to S'$ es una isometría si y sólo si la longitud de cualquier curva en S es igual a la longitud de la imagen de la curva mediante f.

23. (a) Definir una isometría entre una banda del plano y un cilindro menos un meridiano. Probar que dicha isometría no es la restricción de un movimiento rígido del espacio $\mathbb{R}^3$.
    (b) Se considera el cilindro vertical $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (x, -y, -z)$. Probar que $F_{|S} : S \to S$ es una isometría con dos únicos puntos fijos.

24. Probar que la esfera, el plano y la superficie $z = xy$ no son localmente isométricos entre sí.

25. Sea $f : S \to S'$ una isometría local. Probar que $d'(f(p), f(q)) \leq d(p, q)$ para todo $p, q \in S$.

<u>De exámenes pasados</u>

26. Para la campana de Gauss $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-y^2}\}$, y si $a \in (0, 1)$, estudiar si la curva $C = S \cap \{z = a\}$ es una geodésica.

27. Sea S una superficie llana y S' una superficie cuya curvatura de Gauss se anula sólo en una cantidad finita de puntos. ¿Puede existir una isometría local entre S y S'?

28. Se considera la catenoide $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$ y Π el plano $x = 0$. Probar que la aplicación $f : \Pi \to S$ dada por
$$f(0, y, z) = (\cosh(z)\cos(y), \cosh(z)\sin(y), z)$$
es un difeomorfismo local cuya diferencia conserva ángulos y estudiar si es una isometría local. Si $\gamma : I \to \Pi$ es una geodésica en Π, estudiar en qué casos $f \circ \gamma$ es una geodésica de S.

29. Para cada $a \geq 1$, se considera el elipsoide $S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + az^2 = 1\}$. Estudiar si la curva $C = S \cap \{z = 0\}$ es una geodésica.

30. Sea $\alpha : I \to \mathbb{S}^2$ una curva p.p.a. y un embebimiento. Hallar K y H del cono $S = \{t\alpha(s) : t > 0, s \in I\}$. Probar que S es minimal si y sólo si α es una geodésica de $\mathbb{S}^2$. Probar que dos conos S_α y S_β son isométricos.

31. Se considera el helicoide S de ecuación $x \sin(z) = y \cos(z)$. Para $\theta \in \mathbb{R}$, probar que $f_\theta : S \to S$ dada por

$$f_\theta(x, y, z) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta), z + \theta)$$

es un isometría. Si $p = (1, 0, 0)$, estudiar si $\alpha(\theta) = f_\theta(p)$ es una geodésica e S.