Relación de ejercicios del tema 3

Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas. Curso 2015/16
Grupo: 2^0-B
Profesor: Rafael López Camino

(Ejercicios tomados de los libros de do Carmo y Montiel-Ros)

1. Probar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales bisectan las direcciones asintóticas.

2. Demostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una curva, entonces los puntos de esta curva son parabólicos o llanos.

3. Sea $C \subset S$ una curva regular en una superficie con $K > 0$. Demostrar que la curvatura κ en $p \in C$ satisface

$$\kappa(p) \geq \min\{|\kappa_1(p)|, |\kappa_2(p)|\}.$$

4. Supongamos que S tiene la propiedad $|\kappa_1|, |\kappa_2| \leq 1$. ¿es cierto que la curvatura κ de una curva en S también satisface $|\kappa| \leq 1$?

5. Demostrar que la curvatura media H en $p \in S$ está dada por

$$H(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \kappa_n(\theta)\, d\theta,$$

donde $\kappa_n(\theta)$ es la curvatura normal en p a lo largo de la dirección que hace un ángulo θ respecto de una dirección fija.

6. Probar que la suma de las curvaturas normales para cualquier par de direcciones ortogonales en un punto $p \in S$ es constante, e igual a $2H(p)$.

7. Sean $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ las curvaturas normales en $p \in S$ a lo largo de direcciones que hacen un ángulo 0, $2\pi/m, \ldots, (m-1)2\pi/m$ con una dirección principal. Probar que se tiene

$$\kappa_1 + \ldots + \kappa_m = mH.$$

8. Demostrar que si la curvatura media es cero en un punto no llano, entonces este punto tiene dos direcciones asintóticas ortogonales.

9. Probar que

   (a) La imagen $N \circ \alpha$ mediante la aplicación de Gauss $N : S \to \mathbb{S}^2$ de una curva $\alpha : I \to S$ que no contiene ni puntos llanos ni parabólicos es una curva regular en la esfera $\mathbb{S}^2$, llamada la imagen esférica de α.

   (b) Si $C = \alpha(I)$ es una línea de curvatura y κ es su curvatura, entonces

   $$\kappa(p) = |\kappa_n(p)\kappa_N(p)|$$

   donde κ_n es la curvatura normal a lo largo de la tangente a C y κ_N es la curvatura de la imagen esférica $N(C) \subset \mathbb{S}^2$ en $N(p)$.

10. Supongamos que el plano osculatriz de una línea de curvatura $C \subset S$, la cual nunca es tangente a una dirección asintótica, hace un ángulo constante con el plano tangente de S a lo largo de C. Probar que C es una curva plana.

11. Probar que en una curva asintótica, cuya curvatura no es cero, se tiene $|\tau| = \sqrt{-K}$.

12. Si la superficie S_1 interseca a S_2 a lo largo de una curva regular C, entonces la curvatura κ de C en $p \in C$ está dada por

    $$\kappa^2 \sin^2 \theta = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1\kappa_2 \cos\theta$$

    donde κ_1 y κ_2 son las curvaturas normales en p en la dirección tangente a C de S_1 y S_2, respectivamente, y θ es el ángulo entre los vectores normales unitarios de S_1 y S_2 en p.

13. (Teorema de Joachimstahl) Supongamos que S_1 y S_2 son dos superficies que se intersecan a lo largo de una curva regular C y denotamos $\theta(p)$ el ángulo entre ellas en $p \in C$. Supongamos que C es una línea de curvatura de S_1. Probar que θ es constante a lo largo de C si y sólo si C es una línea de curvatura de S_2.

14. Demostrar que los meridianos de un toro son líneas de curvatura.

15. Probar que si $H = 0$ en una superficie sin puntos llanos, entonces la aplicación de Gauss N satisface

$$\langle dN_p(v_1), dN_p(v_2)\rangle = -K(p)\langle v_1, v_2\rangle, (v_1, v_2 \in T_pS).$$

Demostrar que la condición anterior implica que el ángulo de dos curvas en S que se intersecan, y el ángulo de sus imágenes esféricas es, salvo el signo, el mismo.

16. Demostrar que el origen $(0, 0, 0)$ del hiperboloide $z = axy$ tiene $K = -a^2$ y $H = 0$.

17. Determinar las curvas asintóticas y las líneas de curvatura del helicoide y probar que $H = 0$.

18. Determinar las curvas asintóticas de la catenoide.

19. Determinar las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de $z = xy$.

20. Se considera la superficie de Enneper

$$X(u, v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2).$$

   (a) Hallar los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental.
   (b) Hallar las curvaturas principales y probar que $H = 0$.
   (c) Probar que las líneas de curvatura son las curvas coordenadas.
   (d) Las curvas asintóticas son $u + v = cte.$ y $u - v = cte.$

21. (Una superficie con $K = -1$) La seudoesfera es la superficie de revolución que se obtiene al girar la tractriz

$$\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^3 \quad \alpha(t) = \left(\sin t, 0, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$$

respecto del eje z. Hallar los puntos regulares y probar que $K = -1$.

22. (Superficies de revolución con K constante) Sea la superficie de revolución respecto del eje z generada por la curva $z \mapsto (f(z), 0, z)$. Hallar la expresión de la curvatura K. Si ponemos $K = cte$, obtener el cilindro, la esfera y la pseudoesfera. Probar que las únicas superficies de revolución con $K = 0$ son el cilindro, el cono circular recto y el plano.

23. (Superficies de revolución con H constante) Sea la superficie de revolución respecto del eje z generada por la curva $z \mapsto (f(z), 0, z)$. Hallar la expresión de la curvatura H. Si ponemos $H = cte$, obtener la catenoide, la esfera y el cilindro.

24. Sea la homotecia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(p) = \lambda p$, $\lambda > 0$. Si S es una superficie, relacionar su curvatura de Gauss y media con la de $F(S)$.

25. Considerar la superficie obtenida al rotar la curva $y = x^3$, $-1 < x < 1$, respecto de la recta $x = 1$ del plano $z = 0$. Probar que los puntos obtenidos al rotar el origen $(0, 0)$ de la curva son puntos llanos de la superficie.

26. Obtener las curvas asintóticas del hiperboloide de revolución $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

27. (Convexidad local y curvatura) Una superficie S se dice que es localmente convexa en $p \in S$ si existe un entorno $V \subset S$ de p tal que V está contenida en uno de los semiespacios cerrados determinados por T_pS en $\mathbb{R}^3$. Si, además, V tiene sólo un punto común con T_pS, decimos que S es localmente estrictamente convexa.

    (a) Probar que si S es estrictamente localmente convexa en p, entonces $K(p) > 0$.

    (b) Probar que si S es localmente convexa en p, entonces $K(p) \geq 0$.

    (c) Para demostrar que $K \geq 0$ no implica convexidad local, consideramos la superficie $z = x^3(1+y^2)$ definida en $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 1/2\}$. Probar que $K \geq 0$ en U, pero que S no es localmente convexa en $(0, 0) \in U$.

28. Si S es una superficie que se escribe como $S = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son dos superficies orientables y $S_1 \cap S_2$ es conexa, probar que S es orientable.

29. Sea una superficie S con $S = S_1 \cup S_2$, siendo S_1 y S_2 son dos superficies conexas y $S_1 \cap S_2$ tiene exactamente dos componentes conexas A y B. Si S_1 y S_2 son superficies orientadas de manera que las orientaciones inducidas en A coinciden y las inducidas en B no, entonces S no es orientable.

30. Consideramos la circunferencia C $x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = 0$ y el segmento abierto AB en el plano yz dado por $y = 2$, $|z| < 1$. Movemos el centro c de AB a lo largo de C y girando AB respecto de C en el plano cz de manera que cuando c se ha movido un ángulo u, AB ha girando un ángulo $u/2$. Cuando

c completa una vuelta entera a C, la superficie S obtenida se llama *banda de Moebius*. Probar que si $U = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$, un sistema de entornos coordenados es $X, Y : U \to S$,

$$X(u,v) = \left((2 - v \sin \frac{u}{2}) \sin u, (2 - v \sin \frac{u}{2}) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right),$$

$$Y(u,v) = \left((2 - v \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2})) \sin u, (2 - v \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2})) \cos u, v \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}) \right),$$

Hallar la curvatura de Gauss. Usar el ejercicio anterior para probar que la cinta de Moebius no es orientable.

31. Probar que la segunda forma fundamental del paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ en el punto $(0, 0, 0)$ no es semidefinida. En particular, la curvatura de Gauss es negativa en dicho punto.

32. Demostrar que una superficie conexa con $H = K = 0$ es un abierto de un plano.

33. Sea S una superficie y $p \in S$. Probar que p es un punto elíptico si y sólo si existe un punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que p es un máximo local de la función distancia al cuadrado al punto p_0. Deducir que una superficie compacta tiene puntos elípticos.

34. Sea $p \in S$. Demostrar que p es un mínimo local para la función distancia al cuadrado a infinitos puntos de la recta normal a S en p.

35. Sea S una superficie compacta contenida en una bola cerrada de $\mathbb{R}^3$ de radio $r > 0$. Probar que existe al menos un punto $p \in S$ tal que $K(p) \geq 1/r^2$ y que $|H(p)| \geq 1/r$.

36. Se define la función soporte de S con base en el punto $p_0 \in \mathbb{R}^3$ como

$$f(p) = \langle p - p_0, N(p) \rangle, \ p \in S.$$

Demostrar que si S es conexa, entonces f tiene signo constante si y sólo si S es estrellada respecto del punto p_0, es decir, toda recta que sale de p_0 interseca a lo más una vez a S. Probar que si f es constante y existe un punto $p \in S$ con curvatura de Gauss no nula, entonces S es un abierto de una esfera centrada en p_0.

37. Probar que la aplicación de Gauss de una superficie compacta y orientable es un difeomorfismo local si y sólo si tiene curvatura de Gauss positiva en cada punto.

38. Hallar K y H en un cilindro recto $S = \{p + ta : p \in C, t \in \mathbb{R}\}$, donde C es una curva plana y a un vector perpendicular a dicho plano.

39. Sea S una superficie conexa con curvaturas principales constantes. Si S tiene un punto elíptico, entonces S es un abierto de una esfera.

40. Sea la inversión $\phi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$ dada por

$$\phi(p) = \frac{p}{|p|^2}.$$

Probar que $S' = \phi(S)$ es una superficie y relacionar las segundas formas fundamentales, curvatura de Gauss y media de S y S'.

41. Sea S una superficie orientable y N una aplicación de Gauss. Se define $F_r : S \to \mathbb{R}^3$ por

$$F_r(p) = p + rN(p),$$

donde $r > 0$. Supongamos que $S_r = F_r(S)$ es una superficie y que $F_r : S \to S_r$ es un difeomorfismo. Demostrar:

   (a) Si $p \in S$ y $e_1, e_2 \in T_pS$ son direcciones principales, entonces $(dF_r)_p(e_i) = (1 - r\kappa_i(p))e_i$, $1 - r\kappa_i(p) > 0$ y $1 - 2rH(p) + r^2K(p) > 0$.

   (b) $T_pS = T_{F_r(p)}S_r$. Por tanto existe una aplicación de Gauss N' para S_r tal que $N' \circ F_r = N$.

   (c) La recta normal a S en $p \in S$ coincide con la de S_r en $F_r(p)$.

   (d) Probar que

$$\kappa_i'(F_r(p)) = \frac{\kappa_i(p)}{1 - r\kappa_i(p)}.$$

   (e) Probar

$$K' \circ F_r = \frac{K}{1 - 2rH + r^2K}, \; H' \circ F_r = \frac{H - rK}{1 - 2rH + r^2K}.$$

   (f) Si S tiene curvatura media constante $H = 1/(2r)$, entonces $K \neq 0$ y S_r tiene curvatura de Gauss constante $1/r^2$.

42. (Comparación de dos superficies en un punto.) Sean S_1 y S_2 dos grafos sobre el plano xy tales que existe $p \in S_1 \cap S_2$ y $N_1(p) = N_2(p) = (0, 0, 1)$. Decimos que S_1 está por encima de S_2 en p si existe un entorno de p en el que $f_1 \geq f_2$. Probar que si S_1 está por encima de S_2 en p, entonces $H_1(p) \geq H_2(p)$. Demostrar que si $H_1(p) > H_2(p)$, entonces S_1 está por encima de S_2 en p. Deducir que no hay superficies compactas con $H = 0$.

43. Sea S un grafo sobre un disco de $\mathbb{R}^2$ de radio $r > 0$. Si $H \geq a$ para un cierto número real $a > 0$, demostrar que $ar \leq 1$.

44. Probar que si una superficie orientable tiene sus dos curvaturas principales constantes, entonces cada punto suyo es umbilical o tiene curvatura de Gauss menor o igual que cero.

45. Probar que la esfera es la única superficie compacta con $K > 0$ y $H/K = ct$.

46. Probar que la esfera es la única superficie compacta con $K > 0$ y tiene una curvatura principal constate.

<u>De exámenes pasados</u>

47. Sea $\lambda \neq 0$ y consideramos el helicoide definido como la imagen de la aplicación

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad X(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), \lambda v).$$

Hallar K, H, curvaturas principales y puntos umbilicales.

48. Para una superficie S se define el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental como

$$|\sigma|^2(p) = \kappa_1(p)^2 + \kappa_2(p)^2.$$

Probar que $|\sigma|^2 \geq 2H^2$ y que la igualdad se da si y sólo si S es un plano o una esfera.

49. Se considera la campana de Gauss $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2 - y^2}\}$. Clasificar los puntos de S según el signo de K y H.

50. Se considera la catenoide $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\}$. Hallar una aplicación de Gauss de S. Si $p = (x, y, z) \in S$, probar que los vectores $e_1 = (-y, x, 0)$ y $e_2 = (x \sinh(z), y \sinh(z), \cosh(z))$ definen una base de direcciones principales en p.

51. Para cada $a \geq 1$, se considera el elipsoide

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + az^2 = 1\}.$$

Hallar una aplicación de Gauss. Hallar K, H y una base ortonormal de direcciones principales en $p = (1, 0, 0)$.

52. Probar que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \cos(x) + \cos(y) + \cos(z) = 0\}$ es una superficie orientable. Hallar K, H y una base ortonormal de direcciones principales en $(0, \pi, \pi/2)$. Probar que $f : S \to S$ dada por $f(x, y, z) = (x + 2\pi, y + 4\pi, z + 6\pi)$ está bien definida y es una isometría.