Relación de ejercicios del tema 2

Asignatura: Curvas y Superficies. Grado en Matemáticas.
Grupo: 2^0-B
Profesor: Rafael López Camino

(Ejercicios tomados de los libros de do Carmo y Montiel-Ros)

1. ¿Es el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ una superficie? ¿Es el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 < 1\}$ una superficie?

2. Demostrar que el cono de dos hojas con vértice en el origen, esto es, el conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, no es una superficie.

3. Sea $f(x, y, z) = z^2$. Probar que 0 no es un valor regular de f, pero $f^{-1}(\{0\})$ es una superficie.

4. Sea el plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$. Estudiar si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$X(u, v) = (u + v, u + v, uv),$$
donde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > v\}$ es una parametrización de P.

5. Hallar los puntos críticos y valores críticos de $f(x, y, z) = (x + y + z + 1)^2$. ¿Para qué valores de c es el conjunto $f(x, y, z) = c$ una superficie? Responder los dos apartados anteriores para la función $f(x, y, z) = xyz^2$.

6. Si $V \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto, demostrar que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, (x, y) \in V\}$ es una superficie.

7. Demostrar que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$ es una superficie y probar que las siguientes aplicaciones son parametrizaciones de S:

   (a) $X(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) $X(u, v) = (u \cosh(v), u \sinh(v), u^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$.

   ¿Qué partes de S recubren estas parametrizaciones?

8. Demostrar que $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(u)), \;\; a, b, c \neq 0,$$

donde $0 < u < \pi$, $0 < v < 2\pi$, es una parametrización del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Describir geométricamente las curvas $u = cte.$ en el elipsoide.

9. Encontrar una parametrización para el hiperboloide de dos hojas $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$.

10. Dos puntos $p(t)$ y $q(t)$ se mueven a la misma velocidad, $p(t)$ empezando en $(0, 0, 0)$ y moviéndose a lo largo del eje z y $q(t)$ empezando en $(a, 0, 0)$, $a \neq 0$, y moviéndose paralelamente al eje y. Demostrar que la recta que pasa por $p(t)$ y $q(t)$ describe un conjunto en $\mathbb{R}^3$ dado por $y(x - a) + zx = 0$ y estudiar si es una superficie.

11. Probar que la imagen inversa de un valor regular de un función diferenciable $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una curva plana regular. Dar un ejemplo de una curva de este tipo que no sea conexa.

12. Probar que la imagen inversa de un valor regular de una aplicación diferenciable $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una curva regular en $\mathbb{R}^3$. Demostrar la relación entre este resultado y la manera clásica de definir una curva de $\mathbb{R}^3$ como la intersección de dos superficies.

13. Sea $\mathbb{S}^2$ la esfera unidad y $A : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ la aplicación antípoda $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Probar que A es un difeomorfismo.

14. Sea una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Estudiar la diferenciabilidad de $\pi : S \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$ y sus puntos críticos.

15. Demostrar que el paraboloide $z = x^2 + y^2$ es difeomorfo al plano.

16. Construir un difeomorfismo entre la esfera $\mathbb{S}^2$ y el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

17. Sea S una superficie y $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p - p_0|$, donde $p_0 \notin S$ es un punto fijo. Probar que f es diferenciable. Probar que p es un punto crítico de f si y sólo si la recta que une p con p_0 es perpendicular a S en p.

18. Sea $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Se define $F : \mathbb{S}^2 - \{N, S\} \to H$ del siguiente modo: para cada todo punto $p \in \mathbb{S}^2 - \{N, S\}$, sea la recta perpendicular desde p al eje z intersecando a éste en q. Sea l la semirrecta que empieza en q y contiene a p. Entonces $F(p) = l \cap H$. Probar que F es diferenciable.

19. Probar que las rotaciones de una superficie de revolución S sobre su eje son difeomorfismos de S.

20. Sea C la traza de una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ que no pasa por el origen O. Supongamos que α es un embebimiento. Sea S el conjunto generado por el desplazamiento de una recta l pasando por cada punto $p \in C$ y el punto O.

    (a) Encontrar una superficie parametrizada X cuya traza sea S.

    (b) Encontrar los puntos donde X no es regular.

21. Sea una superficie S y $A \subset S$. Probar que A es una superficie si y sólo si A es un abierto de S.

22. Demostrar que la ecuación del plano tangente en (x_0, y_0, z_0) de una superficie regular dada por $f(x, y, z) = 0$ donde 0 es una valor regular de f, es

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

23. Hallar los planos tangentes de $\mathbb{S}^2$ en los puntos $(x, y, 0)$ y demostrar que todos ellos son paralelos al eje z.

24. Demostrar que la ecuación del plano tangente de una superficie S que está dada por el grafo de $z = f(x, y)$ en el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ está dado por

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(z - z_0).$$

    Demostrar que el plano tangente T_pS es el grafo de la diferencial df_p.

25. Demostrar que todos los planos tangentes de la superficie $z = xf(y/x)$, $x \neq 0$, donde f es una función diferenciable, pasan por el origen $(0, 0, 0)$.

26. Si un entorno coordenado de una superficie puede parametrizarse de la forma

$$X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v),$$

donde α, β son curvas regulares, demostrar que los planos tangentes a lo largo de una curva coordenada son todos paralelos a una recta.

27. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con $\kappa \neq 0$. Considerar la superficie tangente

$$X(t,v) = \alpha(t) + v\alpha'(t), \quad t \in I, v \neq 0.$$

Estudiar en qué puntos X es una superficie parametrizada. Demostrar que los planos tangentes a lo largo de las curvas coordenadas $t = cte.$ son iguales.

28. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ la función $f(p) = |p - p_0|^2$, donde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ es un punto fijo. Demostrar que $df_p(v) = 2\langle v, p - p_0\rangle$, $v \in T_pS$.

29. Probar que si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable y lineal. Si S es una superficie, probar que $df_p(v) = f(v)$, $p \in S, v \in T_pS$.

30. (Superficies tubulares) Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con $\kappa \neq 0$. Sea la superficie parametrizada

$$X(s,v) = \alpha(s) + r(\cos(v)N(s) + \sin(v)B(s))$$

donde $r = cte. \neq 0$, $s \in I$ y $N(s)$ y $B(s)$ son los vectores normales y binormales de α, respectivamente. Demostrar que el vector normal en $X(s,v)$ es $-(\cos(v)N(s) + \sin(v)B(s))$.

31. Sea S una superficie de revolución. Probar que las rectas normales intersecan el eje de revolución. Probar también que las rectas normales a lo largo de un meridiano son paralelas a un plano fijo.

32. Demostrar que cada una de las ecuaciones $(a, b, c \neq 0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = by,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = cz$$

define una superficie regular y que todas ellas se intersecan perpendicularmente.

33. Sea $h : S \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle p, a \rangle$, donde $a \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. Demostrar que p es un punto crítico si y sólo si a es perpendicular a S en p.

34. Demostrar que si todos las rectas normales a una superficie conexa pasan por un punto fijo, entonces la superficie está contenida en una esfera.

35. Se dice que dos superficies S_1 y S_2 se intersecan transversalmente si para cada $p \in S_1 \cap S_2$, $T_pS_1 \neq T_pS_2$. Probar que en tal caso, $S_1 \cap S_2$ es una curva regular (usar ejercicio 12).

36. Probar que si una superficie S interseca a un plano en un único punto, entonces este plano coincide con el plano tangente de S en p.

37. Sea S una superficie y P un plano. Si todos los puntos de S se encuentran en el mismo lado de P, probar que P es tangente a S en todos los puntos de $P \cap S$.

38. Demostrar que las proyecciones ortogonales de centro $(0,0,0)$ del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en sus planos tangentes forma un superficie regular dada por

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\} - \{(0,0,0)\}.$$

39. Probar que si todas las rectas normales a una superficie conexa S intersecan a una recta dada, entonces S es una superficie de revolución.

40. Probar que si dos curvas regulares C_1 y C_2 de una superficie S son tangentes en un punto $p \in S$ y si $\varphi : S \to S$ es un difeomorfismo, entonces $\varphi(C_1)$ y $\varphi(C_2)$ son curvas regulares y tangentes en $\varphi(p)$.

41. Demostrar que si p es un punto de una superficie S, entonces es posible un cambio de coordenadas (x,y,z) en un entorno de p tal que S es de la forma $z = (x,y)$, $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$.

42. Definir un valor regular de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ y probar que la imagen inversa de un valor regular es una curva regular en S.

43. El gradiente de una función diferenciable $f : S \to \mathbb{R}$ es una aplicación $\nabla f : S \to \mathbb{R}^3$ tal que $\nabla f(p) \in T_pS$ con la propiedad de que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \quad \forall v \in T_pS.$$

Probar que

(a) El gradiente está bien definido.

(b) Si $X : U \to S$ es una parametrización de S, escribir en coordenadas $(\nabla f) \circ X$ respecto de la base $\{X_u, X_v\}$.

(c) Si $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, entonces $\nabla f = (f_x, f_y, 0)$.

(d) Si $p \in S$ es fijo, entonces la aplicación

$$\{v \in T_pS : |v| = 1\} \to \mathbb{R}, \quad v \longmapsto df_p(v)$$

tiene un máximo en v si y sólo si $v = \nabla f(p)/|\nabla f(p)|$. Por tanto, $\nabla f(p)$ indica la dirección de máxima variación de f en p.

(e) Si $\nabla f(p) \neq 0$ en todos los puntos de la curva de nivel $C = \{q \in S : f(q) = cte.\}$, entonces C es una curva regular de S y ∇f es perpendicular a C en todos sus puntos.

44. Sea $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : |p|^2 - \langle p, a \rangle^2 = r^2\}$ con $|a| = 1$ y $r > 0$, un cilindro circular recto de radio r y cuyo eje es la recta que pasa por el origen en la dirección de a. Demostrar que $T_pS = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle p, v \rangle - \langle p, a \rangle \langle a, v \rangle = 0\}$. Concluir que todas las rectas normales a S cortan ortogonalmente a su eje.

45. Probar que el interior de una superficie como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es vacío.

46. Poner un ejemplo de una superficie que no sea un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$.

47. Sea una superficie compacta S y $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con tres puntos críticos a lo sumo. Demostrar que S es conexa.

48. Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas que no se cortan. Demostrar que existe una recta que corta perpendicularmente en al menos en un punto de S_1 y en al menos en un punto de S_2.

49. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} = a\}$ con $a > 3$. Demostrar que S es una superficie. Encontrar un difeomorfismo entre S y la esfera $\mathbb{S}^2$.

50. Sea $\phi : S \to \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable en una superficie tal que

    (a) $(d\phi)_p : T_pS \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva para todo $p \in S$ y

    (b) $\phi : S \to \phi(S)$ es un homeomorfismo.

    Probar que $\phi(S)$ es una superficie y que $\phi : S \to \phi(S)$ es un difeomorfismo. Si S es compacta, razonar que la segunda condición es equivalente a que ϕ sea inyectiva.

51. Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable positiva. Demostrar que $S(f) = \{f(p)p : p \in \mathbb{S}^2\}$ es una superficie compacta y que $\phi : \mathbb{S}^2 \to S(f)$ definida por $\phi(p) = f(p)p$ es un difeomorfismo.

52. Sea S una superficie compacta. Se dice que S es estrellada respecto del origen 0 si $0 \notin S$ y no se puede trazar una recta tangente a S que pase por 0. Probar que $S(f)$ definida en el ejercicio anterior es estrellada. Demostrar que S es estrellada respecto del origen si es una de las superficies $S(f)$ del ejercicio anterior para cierta función f.

53. Sea S una superficie conexa con la propiedad de que cada punto suyo tiene un entorno abierto contenido en un plano o en una esfera. Demostrar que la superficie está contenida en un plano o en una esfera.

De exámenes pasados

54. ¿Puede ser la aplicación $X(u,v) = (u^3, v^3, uv)$, $u, v \in (-1,1)$ una parametrización de una superficie?

55. Sea una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(0,0) = 0$ y $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Si S es una superficie que satisface $S \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq f(x,y)\}$ y $p = (0,0,0) \in S$, probar que T_pS es el plano de ecuación $z = 0$.

56. Probar que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ es una superficie y que es orientable, hallando una aplicación de Gauss.

    (a) ¿En qué puntos de S la aplicación $\pi : S \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x,y,z) = (x,y)$, no es un difeomorfismo local?

    (b) Probar que $f : S \to \mathbb{S}^2$, $f(p) = p/|p|$ es un difeomorfismo.

57. Sea R la recta vectorial generada por $a \in \mathbb{R}^3$, $|a| = 1$. Sea S una superficie y $f : S \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = |p|^2 - \langle p, a\rangle^2$. Probar que $p \in S$ es un punto crítico de f si y sólo si $p \in R$ o la recta normal a S en p interseca ortogonalmente a R. Deducir que en toda superficie compacta siempre existe una recta afín normal que corta de forma ortogonal a una recta vectorial dada.

58. Sea S el conjunto de las rectas normales a la hélice $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ y probar que $(x, y, z) \in S$ si y sólo si $x \sin(z) = y \cos(z)$. Probar que S es una superficie, hallar una base del plano tangente en cada punto y obtener una orientación. Probar que S es difeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Estudiar en qué punto $\pi : S \to \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, es un difeomorfismo local.

59. Sea $\alpha : I \to \mathbb{S}^2$ una curva p.p.a. y un embebimiento. Probar que el cono $S = \{t\alpha(s) : t > 0, s \in I\}$ es una superficie. Probar que las homotecias de $\mathbb{R}^3$ centradas en el origen son difeomorfismos de S.

60. Probar que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie, que es orientable y que es compacta. Hallar los puntos $p \in S$ tales que T_pS es perpendicular a p y probar que no existe ningún punto p tal que $p \in T_pS$.