Relación de ejercicios del tema 1

Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas
Grupo: 2^0-B
Profesor: Rafael López Camino

(Ejercicios tomados de los libros de do Carmo y Montiel-Ros)

1. Encontrar una parametrización $\alpha(t)$ de la curva cuya traza es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ tal que $\alpha(t)$ recorre el círculo en el sentido de las agujas del reloj con $\alpha(0) = (0, 1)$.

2. Sea $\alpha(t)$ una curva parametrizada que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, demostrar que el vector de posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

3. Una curva parametrizada $\alpha(t)$ tiene la propiedad de que su segunda derivada $\alpha''(t)$ es idénticamente cero. ¿qué puede decirse sobre α?

4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Supongamos que $\alpha'(t)$ es perpendicular a v para todo $t \in I$ y que $\alpha(0)$ también ortogonal a v. Probar que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.

5. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, probar que $|\alpha(t)|$ es una constante no cero si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

6. Demostrar que las rectas tangentes a la curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $y = 0$, $z = x$.

7. Una circunferencia C de radio 1 está apoyada sobre el eje x y fijamos un punto $p \in C$. La figura que describe p cuando C rueda sin deslizarse a lo largo del eje x se llama *cicloide*. Obtener una parametrización de la cicloide, determinar sus puntos singulares y hallar la longitud del arco correspondiente a una vuelta completa de C.

8. Sea $O = (0, 0)$, C la circunferencia de radio $a > 0$ apoyada sobre el eje Ox, $A = (0, 2a) \in C$ y ay la recta tangente a C en A. Se traza una semirrecta r desde O que corta a C en D y la recta Ay en B. En r marcamos el punto P tal que $|OP| = |DB|$. Si rotamos r alrededor de O, considerando todas las semirrectas r, los correspondientes puntos P describe una curva llamada la *cisoide de Diocles*. Probar que

   (a) Una parametrización de la cisoide de Dioceles es
   $$\alpha(t) = \left(\frac{2at^2}{1+t^2}, \frac{2at^3}{1+t^2}\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

   (b) El origen $(0, 0)$ es un punto singular de la cisoide.

   (c) Si $t \to \infty$, $\alpha(t)$ se aproxima a la recta $x = 2a$ y $\alpha'(t) \to (0, 2a)$. Por tanto, si $t \to \infty$, la curva y su tangente se aproximan a la recta $x = 2a$: decimos que $x = 2a$ es una asíntota de la cisoide.

9. La *tractriz* es la curva $\alpha : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por
   $$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right).$$
   Demostrar que α es regular excepto en $t = \pi/2$ y que la longitud del segmento de la tangente de la tractriz entre el punto de tangencia y el eje y es constantemente igual a 1.

10. Sea $\alpha : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por
    $$\alpha(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right).$$
    Probar que:

    (a) Para $t = 0$, α es tangente al eje x.

    (b) Si $t \to \infty$, $\alpha(t) \to (0, 0)$ y $\alpha'(t) \to (0, 0)$.

    (c) Tomar la curva con la orientación opuesta. Probar que si $t \to -1$, la curva y su tangente se aproximan a la recta $x + y + 1 = 0$.

    La figura obtenida completando la traza de α de forma que sea simétrica respecto de la recta $y = x$ es llamada la *folium de Descartes*.

11. Se define la *espiral logarítmica* como $\alpha(t) = ae^{bt}(\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, $b < 0 < a$. Reparametrizar por el arco.

    (a) Demostrar que si $t \to \infty$, $\alpha(t)$ se aproxima al origen dando vueltas respecto del mismo.

    (b) Demostrar que $\alpha'(t) \to (0,0)$ si $t \to \infty$ y que α tiene longitud finita en $[0, \infty)$.

12. Sea la *hélice circular*

$$\alpha(s) = \left(a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, b\frac{s}{c}\right), \quad s \in \mathbb{R},$$

    donde $c^2 = a^2 + b^2$.

    (a) Demostrar que está p.p.a. y determinar la curvatura y torsión.

    (b) Determinar el plano osculatriz de α.

    (c) Demostrar que las rectas normales intersecan ortogonalmente el eje z.

    (d) Probar que las rectas tangentes hacen un ángulo constante con el eje z.

13. Si todas las rectas normales de una curva plana pasan por un punto fijo, probar que la traza de la curva está contenida en una circunferencia.

14. Si una curva espacial y regular tiene la propiedad de que todas sus rectas tangentes pasan por un punto fijo, probar que es un segmento de una recta. ¿Sigue siendo cierta la conclusión si α no es regular?

15. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular con $\kappa(t) \neq 0$. La curva

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t), \quad t \in I$$

    se llama la *evoluta* de α.

    (a) Demostrar que el vector tangente en t de la evoluta de α es el normal a α en t.

    (b) Consideramos las rectas normales de α en dos puntos t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$. Aproximamos t_1 hacia t_2. Demostrar que los puntos intersección de los normales convergen a un punto en la traza de la evoluta de α.

16. Hallar la curvatura de la *catenaria* $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$ y demostrar que su evoluta es $\beta(t) = (t - \sinh\ t \cosh t, 2\cosh t)$.

17. Consideramos la aplicación

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0 \\ (0,0,0) & t = 0 \end{cases}$$

   (a) Probar que α es diferenciable.

   (b) Probar que α es regular y que $\kappa(t) \neq 0$ para $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ y $\kappa(0) = 0$.

   (c) Demostrar que el límite de los planos osculatrices cuando $t \to 0^+$ es el plano $y = 0$, pero si $t \to 0^-$, es el plano $z = 0$.

   (d) Demostrar que τ puede definirse para que $\tau = 0$, aunque α no es una curva plana.

18. Si una curva plana está dada en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [a, b]$, probar que el arco de longitud es

$$\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\theta$$

   y que la curvatura es

$$\kappa(\theta) = \frac{2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{((\rho')^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

19. Supongamos que $\tau(s) \neq 0$ y que $\kappa'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Demostrar que α se encuentra en una esfera si y sólo si

$$R^2 + (R')^2 T^2 = \text{constante},$$

   donde $R = 1/\kappa$, $T = 1/\tau$ y $R' = R'(s)$.

20. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular y supongamos que existe $t_0 \in I$ tal que la distancia $|\alpha(t)|$ desde el origen a la traza de α tiene un máximo en t_0. Probar que la curvatura κ de α en t_0 satisface $|\kappa(t_0)| \geq 1/|\alpha(t_0)|$.

21. Demostrar que conocer la función $s \longmapsto B(s)$, donde $B(s)$ es el vector binormal de una curva α con torsión no cero en todo punto, determina la curvatura $\kappa(s)$ y el valor absoluto de la torsión $\tau(s)$ de α.

22. Demostrar que conocer la función $s \longmapsto N(s)$, donde $N(s)$ es el vector normal de una curva α con torsión no cero en todo punto, determina la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de α

23. Una curva α se llama *hélice* si las rectas tangentes hacen un ángulo constante con una dirección fija. Supongamos que $\tau(s) \neq 0$, $s \in I$. Probar:

    (a) α es una hélice si y sólo si κ/τ es constante (teorema de Lancret).

    (b) Una hélice circular es una hélice.

    (c) α es una hélice si y sólo si las rectas normales son paralelas a un plano fijo.

    (d) α es una hélice si y sólo si las rectas binormales hacen un ángulo constante con una dirección fija.

    (e) La curva

    $$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \int \sin\theta(s)\ ds, \frac{a}{c} \int \cos\theta(s)\ ds, \frac{b}{c} s \right),$$

    donde $c^2 = a^2 + b^2$ es una hélice y probar que $\kappa/\tau = a/b$.

24. Una curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ con $\tau(t) \neq 0$, $t \in I$, se llama una *curva de Bertrand* si existe una curva $\bar{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ tal que las rectas normales de α y $\bar{\alpha}$ en $t \in I$ son iguales. En este caso, $\bar{\alpha}$ se llama la *compañera Bertrand* de α y podemos escribir $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + r(t)N(t)$. Probar que:

    (a) r es constante.

    (b) α es una curva Bertrand si y sólo si existe una relación lineal

    $$A\kappa(t) + B\tau(t) = 1, \quad t \in I,$$

    donde A, B son constantes no nulas.

    (c) Si α tiene más de una compañera Bertrand, entonces tiene infinitas. Este caso ocurre si y sólo α es una hélice circular.

25. Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ dos curvas p.p.a. tales que $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\beta(s)$ para cada $s \in I$. Probar que existe un movimiento rígido inverso M tal que $\beta = M \circ \alpha$.

26. Sea $\alpha : I = (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. y definimos $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ como $\beta(s) = \alpha(-s)$ para cada $s \in I$. Probar que $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s)$, $s \in I$.

27. Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\alpha(-s)$ para cada $s \in (-a, a)$. Probar que la traza de α es simétrica respecto de la recta normal de α en 0.

28. Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\alpha(-s)$ para cada $s \in (-a, a)$. Probar que la traza de α es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.

29. Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ dos curvas p.p.a. con $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(s) > 0$ y $\tau_\alpha(s) = -\tau_\beta(s)$ para cada $s \in I$. Probar que existe un movimiento rígido inverso M tal que $\beta = M \circ \alpha$.

30. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular y $a \in \mathbb{R}^2 - \alpha(I)$. Si existe $t_0 \in I$ tal que $|\alpha(t) - a| \geq |\alpha(t_0) - a|$ para cada $t \in I$, probar que la recta que une el punto a con $\alpha(t_0)$ es perpendicular a α en t_0. Si α está p.p.a., probar que
$$|\kappa(s_0)| \leq \frac{1}{|\alpha(s_0) - a|}.$$

31. Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular y R una recta de $\mathbb{R}^2$. Si existe $t_0 \in I$ tal que la distancia de $\alpha(t)$ a R es mayor o igual que la distancia de $\alpha(t_0)$ a R para cada $t \in I$, y que $\alpha(t_0) \notin R$, probar que la recta tangente a α en t_0 es paralela a R.

32. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular y $[a, b] \subset I$ tal que $\alpha(a) \neq \alpha(b)$. Probar que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que la recta tangente a α en t_0 es paralela al segmento de recta que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$. (Esto es una generalización del conocido teorema de Rolle del análisis)

33. Probar que una curva plana es un segmento de recta si y sólo si todas sus rectas tangentes son concurrentes.

34. Probar que una curva plana es un arco de circunferencia si y sólo si todas sus rectas normales pasan por un punto.

35. Probar que una curva plana es un segmento de recta o un arco de circunferencia si y sólo si todas sus rectas tangentes equidistan de un punto.

36. Para una curva plana p.p.a. demostrar que todas las rectas normales equidistan de un punto si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que
$$\kappa(s) = \pm\frac{1}{\sqrt{as + b}}.$$

37. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. y sea $s_0 \in I$. Definimos $f : I \to \mathbb{R}$ por

$$f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N(s_0) \rangle$$

que mide la distancia orientada del punto $\alpha(s)$ a la recta tangente a α en s_0. Probar que $f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = 0$ y $f''(s_0) = \kappa(s_0)$. Deducir:

(a) Si $\kappa(s_0) > 0$, existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está en el semiplano determinado por la recta tangente a α en s_0 hacia el que apunta $N(s_0)$.

(b) Si existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está en el semiplano determinado por la recta tangente a α en s_0 hacia el que apunta $N(s_0)$, entonces $\kappa(s_0) \geq 0$.

38. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. y $s_0 \in I$ con $\kappa(s_0) > 0$. Sea $a_\lambda = \alpha(s_0) + \lambda N(s_0)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, un punto sobre la recta normal a α en s_0. Definimos la función $f_\lambda : I \to \mathbb{R}$ por

$$f_\lambda(s) = |\alpha(s) - a_\lambda|^2$$

que mide la distancia al cuadrado de los puntos de la curva al punto a_λ. Demostrar que $f_\lambda(s_0) = \lambda^2$, $f'_\lambda(s_0) = 0$ y $f''_\lambda(s_0) = 2(1 - \lambda\kappa(s_0))$. Concluir de aquí que:

(a) Si $\lambda < \frac{1}{\kappa(s_0)}$, existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está fuera de la circunferencia de centro a_λ y radio $|\lambda|$.

(b) Si $\lambda > \frac{1}{\kappa(s_0)}$, existe un entorno J de s_0 en I tal que $\alpha(J)$ está dentro de la circunferencia de centro a_λ y radio λ.

Así vemos cómo la circunferencia de centro $\alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} N(s_0)$ y radio $\frac{1}{\kappa(s_0)}$ es la que mejor aproxima a la curva en un entorno de $\alpha(s_0)$. A esta circunferencia la llamaremos *circunferencia osculatriz*, a su radio, radio de curvatura y a su centro, centro de curvatura. A la curva formada por todos los centros de curvatura de α, $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N(s)$, supuesto $\kappa(s) > 0$, la llamaremos *evoluta* de α.

39. Para una curva plana, probar que todas las circunferencias osculatrices de α pasan por un mismo punto si y sólo si α es un arco de circunferencia.

40. Para una curva plana, probar que todas las rectas normales de α equidistan de un punto si y sólo si la evoluta de α es una circunferencia. En este caso se dice que α es una evolvente o desarrollante de la circunferencia.

41. Sea una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. con curvatura positiva y no decreciente, y sea β su evoluta. Si $s \geq a$, probar:

    (a)
    $$L_a^s(\beta) = \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(s)}.$$

    (b)
    $$|\alpha(s) - \beta(a)| \leq \frac{1}{\kappa(a)},$$

    o sea, $\alpha([a, \infty) \cap I)$ está contenido en el círculo osculador de α en a.

42. Supongamos que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ está p.p.a., $|\kappa(s)| \leq 1/r$ y que $\alpha(\mathbb{R})$ está contenida en un disco cerrado de radio $r > 0$ y centro a. Probar que:

    (a) La función $f(s) = |\alpha(s) - a|^2$ está acotada superiormente y cumple $f''(s) \geq 0$ para cada $s \in \mathbb{R}$.

    (b) Cualquier función diferenciable acotada superiormente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(s) \geq 0$ es constante.

    Deducir de esto que α es la circunferencia de centro a y radio $r > 0$.

43. Probar que una curva espacial es un arco de circunferencia si y sólo si tiene curvatura constante y su traza está contenida en un esfera.

44. Si una curva está contenida en una esfera y todas las rectas binormales son tangentes a esa esfera, probar que α es un arco de círculo máximo.

45. Si una curva espacial está contenida en una esfera y tiene torsión constante a, demostrar que existen $b, c \in \mathbb{R}$ tales que
    $$\kappa(s) = \frac{1}{b\cos(a^2 s) + c\sin(a^2 s)}.$$

46. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a. con $\kappa'(s) \neq 0$ y $\tau(s) \neq 0$ para cada $s \in I$. Probar que la traza de α está contenida en una esfera de radio $r > 0$ si y sólo si
    $$\frac{1}{\kappa(s)^2} + \frac{\kappa'(s)^2}{\kappa(s)^4 \tau(s)^2} = r^2.$$

47. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ p.p.a., con curvatura positiva y contenida en una esfera de radio $r > 0$. Si $s_0 \in I$, probar que son equivalentes:

   (a) $\kappa'(s_0) = 0$,

   (b) $\kappa(s_0) = 1/r$ o bien $\tau(s_0) = 0$.

48. Sea α una curva espacial y $s_0 \in I$. Si existe un plano P que pasa por $\alpha(s_0)$, contiene a la recta tangente a α en s_0 y tal que, para todo entorno J de s_0 en I, $\alpha(J)$ corta a los dos semiespacios abiertos determinados por P, demostrar que P coincide con el plano osculador de α en s_0.

49. Para una curva espacial, probar que todos los planos osculadores son concurrentes si y sólo si la curva es plana.

De exámenes pasados

50. Hallar el triedro de Frenet, la curvatura y torsión de la curva

$$\alpha(s) = (\frac{4}{5}\cos(s), 1 - \sin(s), -\frac{3}{5}\cos(s)).$$

   Estudiar si es plana, y si fuera así, encontrar explícitamente el plano que la contiene.

51. Hallar la curvatura y torsión de la curva $\alpha(s) = (\cos(2s), \sin(2s), 2\cos(s))$. Demostrar que la traza de α coincide con la intersección del cilindro $x^2+y^2 = 1$ con la esfera $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

52. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a., $s_0 \in I$ y $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(s) = \int_{s_0}^{s} N_\alpha(t)\, dt$. Probar que β está parametrizada por el arco, y relacionar los diedros de Frenet y curvaturas de α y β.

53. Hallar las curvas espaciales cuyas rectas binormales pasan por un punto fijo.

54. Probar que la curva $\alpha(t) = (1 + \cos(t), \sin(t), \cosh(t))$ es regular y hallar el triedro de Frenet, su curvatura y torsión.

55. Parametrizar por el arco la curva $\alpha(t) = (t^3/3, 2t, t^2)$. Hallar la longitud de arco de curva comprendido entre los puntos $(1/3, 2, 1)$ y $(9, 6, 9)$. Hallar la curvatura y torsión de α ¿es una hélice?

56. Si $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ son dos curvas p.p.a. con curvaturas positivas tales que $\alpha(s) = -\beta(-s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, entonces $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\beta(-s)$ y $\tau_\alpha(s) = -\tau_\beta(-s)$ para $s \in \mathbb{R}$.