Algunas notas y observaciones sobre el tema 5
Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas

Profesor: Rafael López Camino
Universidad de Granada

7 de junio de 2015

---

1. Geodésicas

Las geodésicas de una superficie son lo que las rectas son a un plano en cualquiera de las tres siguientes ideas:

1. son las curvas más cortas entre dos puntos,
2. son las curvas de curvatura cero,
3. son las trayectorias que describe una partícula que se mueve libremente en la superficie.

Para (1) hay que observar que puede suceder que no haya una curva más corta entre dos puntos (cuando tomamos un plano agujereado, por ejemplo, $S = S' - \{(0,0,0)\}$, S' es el plano $z = 0$ y tomamos los puntos $(1,0,0)$ y $(-1,0,0)$). También puede suceder que haya varias curvas más cortas, como pasa por ejemplo al tomar en la esfera $\mathbb{S}^2$ los puntos N y S, donde cualquier meridiano es la curva más corta entre el polo norte N y el polo sur S.

Para (2) hay que definir qué queremos decir con 'curvatura' que, evidentemente no puede ser la curvatura de la curva considerada como curva espacial, sino que dicha 'curvatura' tiene que reflejar el hecho de que la curva se encuentra en la superficie.

Para (3), hay que definir qué se quiere decir con 'moverse libremente'. La respuesta es que la única fuerza que actúa sobre la partícula es la que le hace estar 'sujeta' a la superficie. Ésta se puede ver como una fuerza perpendicular a la superficie (para que esté sujeta) y no hay otras fuerzas actuando sobre la partícula.

Es desde este último punto de vista como se define una geodésica, diciendo que la aceleración sólo tiene componente normal a la superficie. Si $p \in S$, entonces $\mathbb{R}^3 = T_pS \oplus T_pS$, donde $T_pS =< N(p) >$. En la descomposición de cada vector como suma de vectores de cada uno de los subespacios, a la parte tangente le denotaremos con un superíndice ^{T}.

Definición 1.1 *Una geodésica $\alpha : I \to S$ es una curva que satisface la propiedad*

$$\alpha''(t)^T = 0, \ \forall t \in I.$$

Hacemos las siguientes observaciones:

1. $\alpha''(t)^T$ es lo mismo que decir que $\alpha''(t)$ es proporcional a $N(\alpha(t))$, por tanto, $\alpha''(t) = \lambda(t)N(\alpha(t))$. Per multiplicando por $N(\alpha(t))$, concluimos que α es una geodésica sii
$$\alpha''(t) = \sigma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))N(\alpha(t)), \quad \forall t \in I. \tag{1}$$

2. Una geodésica está parametrizada proporcionalmente por el arco, es decir, la velocidad es constante: $|\alpha'(t)| = ct$. Esto se debe a que
$$\frac{d}{dt}\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle = 2\langle \alpha''(t), \alpha'(t)\rangle = 0.$$

3. En el caso que la constante sea 0, entonces la curva es constante, que evidentemente es una geodésica.

4. Si α es una geodésica y $\beta(t) = \alpha(\lambda t + \mu)$, entonces β es una geodésica. Además es la única forma de reparametrizar una geodésica para que siga siendo geodésica, pues si $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, entonces $\beta''(s) = \phi''(s)\alpha'(\phi(s)) + \phi'(s)^2\alpha''(\phi(s))$. Entonces:
$$\beta''(s)^T = \phi''(s)\alpha'(\phi(s)) + \phi'(s)^2\alpha''(\phi(s))^T = \phi''(s)\alpha'(\phi(s))$$
que es cero sii $\phi''(s) = 0$, es decir, $\phi(s) = \lambda s + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

De la última nota, damos la siguiente definición:

Definición 1.2 *Una curva en una superficie es una geodésica si existe una reparametrización suya que sea una geodésica. Un conjunto $C \subset S$ es una geodésica si se puede parametrizar mediante una geodésica.*

El cálculo de las geodésicas de una superficie no es fácil ya que por la propia definición, consiste en anular la parte tangente de la aceleración de la curva, es decir, es una EDO de segundo orden. Sin embargo, en los siguientes ejemplos, la cuenta es fácil ya que por un lado conocemos la segunda forma fundamental, ésta es 'simple' y finalmente, somos capaces de resolver la ecuación diferencial.

Proposición 1.3 *Las geodésicas de un plano son las rectas del plano.*

Demostración. Sea P un plano y α una geodésica en P. Sabemos que $\sigma = 0$, luego (1) se escribe como $\alpha''(t) = 0$, cuya solución es $\alpha(t) = p + tv$. Esta curva es una recta. $\square$

Proposición 1.4 *Las geodésicas de una esfera son los círculos máximos.*

Demostración. Suponemos que la esfera es $\mathbb{S}^2$. Tomamos $N(p) = -p$. Entonces $\sigma_p(u, v) = \langle u, v\rangle$ y (1) es $\alpha''(t) + \alpha(t) = 0$. Entonces existen $p, v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\alpha(t) = \cos(t)p + \sin(t)v$. Como $\alpha(0) = p$, entonces $p \in \mathbb{S}^2$ y como $\alpha'(0) = v$, entonces $v \in T_pS =< p >^{\perp}$. Por tanto, $\alpha(t)$ se encuentra en el plano generado por p y v. Al ser un plano vectorial, la intersección con $\mathbb{S}^2$ es un círculo máximo. $\square$

Proposición 1.5 *Las geodésicas de un cilindro circular recto son las hélices, las rectas y las circunferencias.*

Demostración. Tomamos $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $N(p) = (-x, -y, 0)$ y por tanto $\sigma_p(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2$. Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una geodésica p.p.a, entonces el sistema a resolver es

$$\begin{cases} x'' + (x'^2 + y'^2)x = 0 \\ y'' + (x'^2 + y'^2)y = 0 \\ z'' = 0. \end{cases}$$

De la tercera, $z(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Como α está p.p.a., $x'^2 + y'^2 = 1 - a^2$, luego las dos ecuaciones primeras son

$$\begin{cases} x'' + (1 - a^2)x = 0 \\ y'' + (1 - a^2)y = 0. \end{cases}$$

La solución es de la forma

$$x(t) = \lambda \cos(\sqrt{1-a^2}t) + \mu \sin(\sqrt{1-a^2}t)$$

$$y(t) = m \cos(\sqrt{1-a^2}t) + n \sin(\sqrt{1-a^2}t).$$

Para escribir mejor estas soluciones, observemos que $\alpha(0) = (x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, luego $(x(0), y(0)) \in \mathbb{S}^1$, de lo que se deduce que $\lambda^2 + m^2 = 1$. Del mismo modo, de $|\alpha'(0)| = 1$ se tiene $\mu^2+n^2 = 1$. Entonces se deduce que existenφ, θ tal que $\lambda = \cos\theta, m = \sin\theta$, y $\mu = \cos\varphi, n = \sin\varphi$. Después de algunas simplificaciones, obtenemos

$$x(t) = \cos(\sqrt{1-a^2}t + \varphi), y(t) = \sin(\sqrt{1-a^2}t + \varphi)$$

que junto $z(t)$, tenemos

$$\alpha(t) = (\cos(\sqrt{1-a^2}t + \varphi), \sin(\sqrt{1-a^2}t + \varphi), at + b).$$

Si $a = 0$, es una circunferencia (horizontal), si $a^2 = 1$, es una recta vertical, y si $a^2 \neq, 1$, es un hélice circular. □

El primer resultado que obtenemos es que desde cualquier punto y desde cualquier dirección, hay una geodésica que sale de dicho punto a esa velocidad. Es natural pensar que dicho resultado es cierto ya lo que estamos diciendo es que si colocamos una canica en punto de una superficie y la lanzamos en una dirección (tangente) cualquiera, si dejamos que dicha canica se mueva libremente en la superficie, entonces describirá una trayectoria.

Teorema 1.6 *Sea $p \in S$, $v \in T_pS$. Entonces hay una única geodésica (salvo reparametrizaciones) $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.*

Demostración. Como el resultado es local, tomamos una parametrización $X = X(u, v)$ alrededor de p y escribimos $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$. Entonces

$$\alpha' = uX_u + vX_v,$$

$$\alpha'' = u''X_u + v''X_v + u'^2X_{uu} + 2u'v'X_{uv} + v'^2X_{vv}.$$

Imponemos ahora la condición $\alpha''(t)^T = 0$, es decir,

$$\alpha''(t)^T = u''X_u + v''X_v + u'^2X_{uu}^T + 2u'v'X_{uv}^T + v'^2X_{vv}^T.$$

Escribimos las parciales segundas respecto de la base $\{X_u, X_v, N\}$.

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN.$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN.$$
$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN.$$

Entonces[1] α es geodésica sii

$$\begin{aligned} u'' + \Gamma_{11}^1 u'^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 v'^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 u'^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 v'^2 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Si ponemos $q = X^{-1}(p) = (u_0, v_0)$ y $v \in T_pS$ como $v = \bar{u}_0 X_u(q) + \bar{v}_0 X_v(q)$, entonces la demostración acaba planteando el EDO anterior con condiciones iniciales

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(0), v'(0)) = (\bar{u}_0, \bar{v}_0).$$

La unicidad es consecuencia de la teoría general. □

Definición 1.7 *Las funciones Γ_{ij}^k definidas en el abierto U se llaman símbolos de Christoffel de la parametrización X.*

Observemos que dichos coeficientes son diferenciables, aún más:

Proposición 1.8 *Los símbolos de Christoffel son funciones diferenciables que sólo dependen de la métrica.*

Demostración. El resultado se obtiene de despejar Γ_{ij}^k de la definición, multiplicando escalarmente por X_u y X_v. Lo hacemos para Γ_{11}^k. Multiplicando por los vectores anteriores, tenemos

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2$$
$$\langle X_{uu}, X_v \rangle = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2$$

Este sistema tiene solución única pues el determinante de la matriz de los coeficientes, a saber, $EG - F^2$, no es cero. Como es es lineal, y todos los coeficientes son diferenciables, entonces las soluciones también lo son. Para probar que dependen de la primera forma fundamental, observamos que la matriz de los coeficientes está formada por los coeficientes de la primera forma fundamental, es decir, depende de la métrica. Para los términos independientes, tenemos

$$\langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2}\langle X_u, X_u \rangle_u = \frac{1}{2} E_u.$$

[1] La notación correcta sería $X_{uu}(u(t), v(t))$, $\Gamma_{11}^1(u(t), v(t))$, y así sucesivamente.

$$\langle X_{uu}, X_v\rangle = \langle X_u, X_v\rangle_u - \langle X_u, X_{uv}\rangle = \langle X_u, X_v\rangle_u - \frac{1}{2}\langle X_u, X_u\rangle_v = F_u - \frac{1}{2}E_v.$$

□

Vamos a poner un ejemplo de cómo se usa el teorema de existencia y unicidad. Vamos a hallar las geodésicas de una superficie de revolución. Sea S la superficie de revolución generada por la curva $t \longmapsto (f(t), 0, g(t))$, que suponemos parametrizada por el arco, y la superficie $S = X(I\times\mathbb{R})$ donde $X(t,\theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t))$. Sea $\alpha(s) = X(t(s), \theta(s))$ una geodésica, hallamos su aceleración y luego su parte tangente. Para ello, necesitamos descomponer, en cada punto $X(t,\theta)$, $\mathbb{R}^3 = T_{X(t,\theta)}S\oplus <N(X(t,\theta))>$. Una base del plano tangente está generada por

$$\{X_t = (f'\cos\theta, f'\sin\theta, g'), X_\theta = (-f\sin\theta, f\cos\theta, 0)\}.$$

Hallamos ahora la aceleración de α:

$$\alpha'(s) = t'X_t + \theta' X_\theta, \quad \alpha''(s) = t''X_t + \theta''X_\theta + t'^2X_{tt} + 2t'\theta'X_{t\theta} + \theta'^2X_{\theta\theta}.$$

Hallamos las derivadas de orden 2:

$$X_{tt} = (f''\cos\theta, f''\sin\theta, g''),\ X_{t\theta} = (-f'\sin\theta, f'\cos\theta, 0),\ X_{\theta\theta} = (-f\cos\theta, -f\sin\theta, 0).$$

Multiplicamos escalarmente por X_t y X_θ. Usaremos que $E = 1$, $F = 0$ y $G = f^2$:

$$t'' + t'^2(f'f'' + g'g'') - \theta'^2 ff' = 0.$$

$$\theta'' + 2t'\theta' ff' = 0.$$

Al derivar $f'^2 + g'^2 = 1$, tenemos $f'f'' + g'g'' = 0$. Por tanto las ecuaciones de las geodésicas en una superficie de revolución son:

$$t'' - \theta'^2 ff' = 0.$$

$$\theta'' + 2t'\theta' ff' = 0.$$

De ambas ecuaciones extraemos las siguientes tres consecuencias:

1. Los meridianos son geodésicas. Un meridiano es la curva coordenada $\theta = ct$, luego la segunda ecuación se satisface. Para la primera, hay que tener en cuenta que el meridiano está parametrizado por el arco, luego $|\alpha'(s)|^2 = t'^2 + f'2\theta'^2 = 1$. Como θ es constante, entonces $t'^2 = 1$, luego $t't'' = 0$, es decir, $t'' = 0$. Esto implica que satisface también la primera ecuación.

2. Los paralelos no son necesariamente geodésicas. Un paralelo es la curva coordenada $t = ct$. Entonces las dos ecuaciones se reducen a $\theta' f' = 0$ y $\theta'' = 0$. De nuevo, por estar p.p.a., $t'^2 + f'2\theta'^2 = 1$. En este caso, $\theta'^2 = 1$. Así $\theta'' = 0$, y la ecuación se satisface. La primera ecuación de la geodésica se reduce a $f' = 0$. Por tanto, el paralelo es una geodésica sii $f' = 0$, es decir, *el vector velocidad del meridiano en el punto que define el paralelo es vertical, es decir, paralelo al eje z.*

3. La segunda ecuación se escribe como $(\theta' f^2)' = 0$. Damos una interpretación geométrica de dicha ecuación. El ángulo φ que hace la geodésica con el paralelo que interseca es:
$$\cos\varphi = \frac{\langle \alpha'(s), X_\theta \rangle}{|\alpha'||X_\theta|} = \frac{\theta' f^2}{f} = \theta' f.$$
Por tanto, α es una geodésica sii $f \cos\varphi = ct$.

A continuación enunciamos el teorema Egregium de Gauss, probado por el mismo Gauss, y que nos dice que para conocer cuán de curvada está una superficie no hay que 'salirse' de la misma y observar cómo lo está, sino que sólo midiendo 'dentro' de la superficie es posible saber su curvatura.

Teorema 1.9 (Egregium) *La curvatura de Gauss sólo depende de la métrica.*

Demostración. Vamos a probar que dada una parametrización de la superficie, se obtiene una expresión de K en términos de los símbolos de Christoffel y de sus derivadas, y de los coeficientes de la primera forma fundamental. Simplemente es computar
$$(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$$
a partir de las expresiones de las parciales de orden 2 de la parametrización. Dicha igualdad se expresa en términos de la base $\{X_u, X_v, N\}$ e igualamos coeficiente a coeficiente. El que nos interesa sólo es el que acompaña al vector X_v. Entre los términos, aparecen N_u y N_v y para ello hay que hacer uso de la expresión matricial de la aplicación de Weingarten $A_p = -(dN)_p$ respecto de la base $\{X_u, X_v\}$, que era
$$A_p \to \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Lo que obtenemos es:
$$(\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})^2 = EK.$$

$\square$

Para la demostración sólo hemos usado 'poca' información de toda de la que disponemos. Por ejemplo, aparecen dos identidades más que sale de igualar los coeficientes X_u y N (en ésta última, aparecen los coeficientes de la segunda forma fundamental y sus derivadas). También se pueden hacer cálculos parecidos con $(X_{uv})_v = (X_{vv})_u$, obteniendo de nuevo tres identidades más.

2. La aplicación exponencial

El primer problema que vamos a plantear que generaliza en cierto sentido el papel de las rectas en el plano es si dos puntos cualesquiera se pueden unir por una geodésica. Ya hemos visto que no se da en general. Lo que vamos a probar es que es cierto 'localmente', concretamente, vamos a probar que *dado* un punto de la superficie, existe un entorno de manera que los puntos de éste se unen mediante una geodésica con el punto dado. Además, un segundo resultado será que dicha geodésica es la curva más corta entre ambos puntos.

El punto de partida es volver al sistema (2) de existencia de geodésicas y usar el teorema de dependencia de parámetros. Denotamos por

$$\gamma = \gamma(t; p, v)$$

la geodésica que sale de p a velocidad v, es decir,

$$\gamma(0; p, v) = p, \quad \gamma'(0; p, v) = v.$$

El teorema de dependencia de parámetros nos dice que dicha aplicación en sus tres variables, t, p, v, es diferenciable. Para lo que nos hace falta, sólo nos interesa variar t y v. En el sistema (2), tomamos $t = 0$, $(u'(0), v'(0)) = (0, 0)$. Entonces, en cierta bola de radio ϵ_1 de $t = 0$ y de radio ϵ_2 de $(0, 0)$ tenemos soluciones. Aplicando X, y después de un cambio apropiado de épsilons, la función

$$\gamma : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \times B_{\epsilon_2}(0), \gamma(t) = \gamma(t; p, v)$$

es diferenciable, donde $B_{\epsilon_2}(0) \subset T_pS$.

Probamos el siguiente resultado de *homogeneidad*:

$$\gamma(\lambda t; p, v) = \gamma(t; p, \lambda v), \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Esto es evidente porque en el lado izquierdo tenemos una reparametrización de la geodésica $\gamma(t; p, v)$ de manera que sigue siendo geodésica. Pero en $t = 0$ es p y su velocidad inicial es λv, luego por la unicidad de las geodésicas, dicha curva es la que hay a la derecha de la igualdad.

La igualdad anterior nos permite agrandar/achicar el intervalo $(-\epsilon_1, \epsilon_1)$ hasta convertirlo en $(-2, 2)$; el otro, el valor de ϵ_2 también cambia, obteniendo

$$\gamma : (-2, 2) \times B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R} \times T_p \to S.$$

Definición 2.1 *Se llama aplicación exponencial la dada por*

$$exp_p : B_\epsilon(0) \to S, \quad exp_p(v) = \gamma(1; p, v).$$

Para abreviar, vamos a denotar $E = \exp_p$.

Teorema 2.2 *Sea $p \in S$. Existe un abierto $p \in V \subset S$ tal que para todo $q \in V$, existe una geodésica que une p con q.*

Demostración. Probamos que $(dE)_0 = Id$. Aquí estamos viendo $B_\epsilon(0)$ como un abierto de la superficie T_pS, que es un plano vectorial. Por tanto,

$$(dE)_0 : T_0(T_pS) = T_pS \to T_{E(0)=p}S.$$

Pero usando (3), y como $T_0(T_pS)$ es un plano,

$$(dE)_0(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E(0 + tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(1; p, tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(t; p, v) = \gamma'(0) = v.$$

Por tanto, $(dE)_0 = Id$. De aquí que E se llame aplicación *exponencial.* Al ser un isomorfismo, el teorema de la función inversa nos dice que existe un abierto $0 \in W \subset T_pS$ y $p \in V \subset S$ tal que $E : W \to V$ es un difeomorfismo. En particular, si $q \in V$, existe $v \in W$ tal que $E(v) = p = \gamma(1; p, v)$, luego la geodésica $\gamma(t; p, v)$ satisface que en $t = 0$ es el punto p y en $t = 1$, es el punto q, es decir, une los dos puntos. □

Definición 2.3 *Se llama entorno normal de p a un abierto V donde E sea un difeomorfismo. Si además, dicho abierto es la imagen de una bola $B_\delta(0) \subset W$ de T_pS, se llama bola geodésica de radio $\delta > 0$.*

Corolario 2.4 *Si V es un entorno normal, la aplicación $X = E = W \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$ es una parametrización de p en S.*

El teorema anterior puede resultar algo insatisfactorio en el sentido que existen geodésicas que unen todos los puntos de V con el punto p inicial. Sin embargo, con un argumento algo más delicado, y usando el teorema de la dependencia de parámetros haciendo variar también el valor inicial p, es posible probar que, dado un punto p, existe un entorno suyo de manera que para dos puntos cualesquiera de dicho entorno, hay una geodésica que los une.

Teorema 2.5 *Sea $p \in S$ y V una bola geodésica. Entonces:*

1. *Para todo $q \in V$ existe una geodésica que une p con q.*
2. *Dicha geodésica es la curva más corta de entre todas las curvas que unen p con q.*
3. *Si α es una curva que une p con q con la misma longitud de la geodésica anterior, entonces es la misma, salvo reparametrizaciones.*

Demostración. Sea $V = E(B_\delta(0))$. Sea $\alpha : [0,b] \to S$ una curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(b) = q$. Quitamos dos situaciones que nos dan curvas más largas. En primer lugar, suponemos que $\alpha(t) \neq p$ si $t > 0$, es decir, la curva no pasa más veces por el punto inicial p. Si fuera así, la parte de la curva hasta el último instante que pasa por p tiene mayor longitud de curva. También podemos suponer que la traza de α se encuentra en V: en caso contrario, la curva tiene longitud mayor que la geodésica que vamos a hallar más tarde.

Por tanto, podemos suponer que $\alpha(t) \in V$. Usamos coordenadas polares, y que E es una parametrización de V, es decir, en T_pS tomamos una base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ y escribimos los elementos de $B_\epsilon(0)$ de la forma $(r,\theta) := r(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)$. Luego

$$X = X(r,\theta) = E(r(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2))$$

es una parametrización de V (excepto en $r = 0$, que no influirá en la demostración). En primer lugar hacemos una cuenta, y luego decimos qué vamos a probar.

Sea $q \in V$, con $q = E(v) = \gamma(1; p, v)$. Por un lado, la geodésica $\gamma = \gamma(t; p, v)$ que une p $(t = 0)$ con q $(t = 1)$ tiene longitud (usando que γ tiene velocidad constante)

$$L_0^1(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \int_0^1 |\gamma'(0)|dt = \int_0^1 |v|dt = |v|.$$

Por otro lado, si $\alpha(t) = X(r(t), \theta(t))$, entonces

$$L_0^b(\alpha) = \int_0^b |\alpha'(t)|dt = \int_0^b |r'X_r + \theta' X_\theta| = \int_0^b \sqrt{r'^2E + 2r'\theta' F + \theta'^2 G}dt,$$

donde $\{E, F, G\}$ son los coeficientes de la primera forma fundamental respecto de la parametrización X. Vamos a probar que

$$E = 1, \;\; F = 0.$$

En tal caso, la cuenta sigue del siguiente modo:

$$L_0^b(\alpha) = \int_0^b \sqrt{r'^2 + \theta'^2 G}dt \geq \int_0^b r'dt = r(b) - r(0).$$

Es evidente que $r(0) = 0$, y que $r(b)$ se calcula usando que

$$\alpha(b) = \gamma(1; p, v) = X(r(b)(\cos\theta(b)e_1 + \sin\theta(b)e_2) \Rightarrow v = r(b)(\cos\theta(b)e_1 + \sin\theta(b)e_2),$$

luego $r(b) = |v|$. Así,

$$L_0^b(\alpha) \geq \int_0^b r'dt = r(b) - r(0) = |v| = L_0^1(\gamma).$$

Además, si α es una curva con la misma longitud que γ, es porque: (i) para todo $t > 0$, $\alpha(t) \neq p$; (ii) la traza de α se encuentra en V; (iii), la función θ es constante. Entonces α se escribe como (usando (3)):

$$\alpha(t) = E(r(t)(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)) = \gamma(1; p, r(t)(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)) = \gamma(r(t); p, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2),$$

es decir, $\alpha(t)$ es una curva del tipo $\gamma(r(t); p, w)$, donde $w = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$.

Antes de continuar, volvemos a una observación inicial. La longitud de la geodésica γ es $|v|$ y por tanto, $|v| < \delta$. Cuando antes hemos dicho que descartábamos curvas que se salieran de V es porque en el primer momento que se salen, el punto del borde $\partial V = E(\partial B_\delta(0))$ es de la forma $q = E(w)$ con $|w| = \delta$ (podemos suponer que hay bolas geodésicas con un radio algo mayor que δ) y por tanto, la longitud de la curva es mayor que la longitud de la curva hasta el punto q, que a su vez es mayor que $|w| = \delta$, y este número es mayor estricto que $|v|$.

Finalmente, probamos que $E = 1$ y $F = 0$. En primer lugar, hallamos X_r y X_θ:

$$\begin{aligned}
X_r &= \frac{d}{dr}E(r, \theta) = \frac{d}{dr}E(r(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)) = \frac{d}{dr}\gamma(1; p, r(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)) \\
&= \frac{d}{dr}\gamma(r; p, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) = \gamma'(r; p, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) \\
X_\theta &= \frac{d}{d\theta}E(r(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)) = (dE)_{X(r,\theta)}(r(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2)).
\end{aligned}$$

Entonces

$$E = \langle X_r, X_r\rangle = |\gamma'(r; p, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2)| = |\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2| = 1.$$

Para F, veamos que no depende de r:

$$F_r = \frac{\partial}{\partial r}\langle X_r, X_\theta\rangle = \langle X_{rr}, X_\theta\rangle + \langle X_r, X_{r\theta}\rangle = 0 + \frac{1}{2}\langle X_r, X_e\rangle_\theta = \frac{1}{2}E_\theta = 0.$$

El 0 aparece porque X_{rr} es $\gamma''(r)$, que es un vector perpendicular a la superficie (γ es geodésica), pero X_θ es tangente a la superficie. Veamos el valor de F en $r = 0$. En verdad, hay que hacer límites cuando $r \to 0$:

$$F(0, \theta) = \langle X_r(0, \theta), X_\theta(0, \theta)\rangle = \langle \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, X_\theta(0, \theta)\rangle,$$

pero

$$X_\theta(0, \theta) = (dE)_{X(0,\theta)}(0(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2)) = (dE)_p(0) = 0.$$

□

3. Geodésicas desde el punto de vista variacional

Vamos a definir una distancia en una superficie que sea *intrínseca* a ella. La manera natural es decir que la distancia entre dos puntos es la longitud de la curva más corta que une ambos puntos. Como no tenemos asegurada dicha existencia, damos la siguiente:

Definición 3.1 *Sean $p, q \in S$. Se define la distancia $d(p, q)$ entre p y q como*

$$d(p, q) = \text{ínf}\{L_a^b(\alpha) : \alpha : [a, b] \to S\ C^\infty \text{ a trozos}, \alpha(a) = p, \alpha(b) = q\}.$$

Proposición 3.2 *La función d es una distancia métrica.*

Demostración. Es evidente que $d \geq 0$, que es simétrica, tomando para una curva α, la curva α^{-1}. La desigualdad triangular se debe a que si α es una curva que une p con q y β es otra que une q con $r \in S$, entonces la curva $\alpha \star \beta$ une p con q y luego q con r tiene longitud $L(\alpha \star \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$. Entonces por definición, $d(p, r) \leq L(\alpha) + L(\beta)$ y tomando ahora ínfimos para todas las curvas α y β, se obtiene $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$.

Supongamos que $d(p,q) = 0$. Como $|p-q| \leq L(\alpha)$, entonces tomando ínfimos, $|p-q| = 0$, es decir, $p = q$. $\square$

Por tanto el par (S,d) es un espacio métrico, obteniendo una topología asociada. Sin embargo ya teníamos en S la topología euclídea, es decir, la inducida de la euclídea de $\mathbb{R}^3$. Con ella hemos trabajado siempre que hemos hablado de continuidad de aplicaciones en superficies.

Proposición 3.3 *La distancia d es equivalente a la euclídea.*

Demostración. La igualdad de las topologías la hacemos viendo que el conjunto de sucesiones convergentes es el mismo en ambas (es suficiente en espacios métricos). Si $\{p_n\} \to p$ para d, entonces $d(p_n,p) \to 0$. Como $|p_n - p| \leq d(p_n,p) \to 0$, entonces $\{p_n\} \to p$ para la distancia euclídea.

Recíprocamente, sea $\{p_n\} \to p$ para la distancia euclídea. En particular, a partir de cierto lugar, la sucesión se encuentra en una bola geodésica de p y podemos escribir $p_n = E(v_n)$, con $v_n \in T_pS$. Como E es un difeomorfismo, E^{-1} es continua, es decir,

$$v_n = E^{-1}(p_n) \to E^{-1}(p) = 0.$$

La geodésica $\gamma_n = \gamma(t;p,v_n)$ que une p con $\gamma(1) = \gamma(1;p,v_n) = E(v_n) = p_n$ tiene longitud

$$L_0^1(\gamma_n) = \int_0^1 |\gamma_n'(t)|dt = \int_0^1 |v_n| = |v_n| \to 0,$$

luego $d(p_n,p) \to 0$, es decir, $p_n \to p$ para la distancia d. $\square$

No vamos a probar que las geodésicas son las curvas más cortas entre dos puntos, pues puede que no existan tales curvas. Pero sí probaremos que si existen, deben ser geodésicas. El siguiente argumento es variacional.

Sea $\alpha : [a,b] \to S$, $\alpha = \alpha(s)$, una curva (puede ser diferenciable a trozos) que une p con q. Tomamos una variación de dicha curva, es decir, una familia diferenciable de curvas que unan p con q, es decir, una aplicación

$$F : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$$

con las siguientes propiedades:

1. F es diferenciable.
2. $F(s,0) = \alpha(s)$.

3. $F(a,t) = \alpha(a)$, $F(b,t) = \alpha(b)$.

Para cada t, la curva $s \longmapsto F(s,t)$ está en S y une p con q y su longitud es

$$L(t) = \int_a^b |F_s| ds.$$

En particular, $L(0) = L_a^b(\alpha)$ es la longitud de α.

Teorema 3.4 *Sea $\alpha : [a,b] \to S$ una curva. Son equivalentes:*

1. α es una geodésica.

2. $L'(0) = 0$ para cualquier variación de α.

Demostración. La demostración pasa por tener una expresión sencilla de $L'(0)$. Ya que el integrando de $L(t)$ en $t = 0$ no es cero, se puede derivar respecto de t introduciendo la derivada en el integrando, obteniendo:

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} |F_s| ds = \int_a^b \langle \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} F_s, F_s(s,0)\rangle ds \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\langle F_t, F_s\rangle - \langle F_t(s,0), F_{ss}(s,0)\rangle \; ds \\ &= \langle F_t(b,0), F_s(b,0)\rangle - \langle F_t(a,0), F_s(a,0)\rangle - \int_a^b \langle F_t(s,0), \alpha''(s)\rangle ds \\ &= -\int_a^b \langle F_t(s,0), \alpha''(s)^T\rangle ds, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $F_t(b,0) = 0$ pues la aplicación $t \longmapsto F(b,t) = \alpha(b)$ es constante, y lo mismo para $F_t(a,0)$. Esta identidad se llama la fórmula de la *variación primera de la longitud*. Establecida dicha igualdad, acabamos la demostración del resultado.

1. Si α es geodésica, entonces $\alpha''(s)^T = 0$, obteniendo $L'(0) = 0$.

2. Si $L'(0) = 0$ para cualquier variación, consideramos una aplicación $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable y positiva que se anule en los extremos (p.ej. $f(s) = \sin((s - a)\pi/(b-a)))$ y sea
$$W(s) = f(s)\alpha''(s)^T, \ s \in [a,b].$$

Esta aplicación es diferenciable y es tangente a S en cada punto $\alpha(s)$. Entonces existe una variación $F : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ de la curva α de manera que

$$F_t(s, 0) = W(s), \ s \in I.$$

Además, como $f(a) = f(b) = 0$, dicha variación se puede elegir para que satisfaga la tercera condición de la definición[2]. Sustituyendo el valor de $F_s(s, 0)$ en $L'(0)$ y como es 0, concluimos

$$0 = -\int_a^b f(s)|\alpha''(s)^T|^2 ds.$$

Como $f > 0$, entonces $|\alpha''(s)^T| = 0$, es decir, α es una geodésica.

$\square$

4. Triedro de Darboux

Dada una curva en una superficie, se va a construir un triedro análogo al de Frenet, pero que lleve la información geométrica de la superficie. Este triedro se llama triedro de Darboux que será una base ortonormal diferenciable y positivamente orientada. También haremos una primera derivada obteniendo las ecuaciones de Darboux.

Sea S una superficie orientada con N su aplicación de Gauss. Sea $\alpha : I \to S$ una curva p.p.a. El primer vector es el vector tangente $T(s) = \alpha'(s)$. El segundo es el vector normal a la superficie en cada punto de la curva, es decir,

$$N(s) = N(\alpha(s)).$$

Por tanto, el tercer vector es

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Es evidente que $\{T(s), N(s), B(s)\}$ es una base ortonormal diferenciable y positivamente orientada llamada el *triedro de Darboux*. Para las ecuaciones de Darboux, expresamos las primeras derivadas respecto de la base anterior. Como T, N y B tienen módulo 1, dichas derivadas no tienen término en T, N y B, respectivamente. Para T', tenemos

$$\langle T'(s), N(s)\rangle = -\langle T(s), N'(s)\rangle = \langle T(s), -(dN)_{\alpha(s)}(T(s))\rangle = \sigma_{\alpha(s)}(T(s), T(s)) = \kappa_n(\alpha'(s)).$$

[2]No vamos a detenernos en su existencia, pero basta elegir $F(s, t) = \exp_{\alpha(s)}(tf(s)W(s))$.

Escribimos pues,

$$T'(s) = \kappa_n(s)N(s) + \kappa_g(s)B(s).$$

Para N', se tiene

$$N'(s) = -\kappa_n(s)T(s) + \tau_g(s)B(s).$$

Las funciones (diferenciables) κ_g y τ_g no son nada más que las coordenadas apropiadas en la base. De las dos ecuaciones anteriores, se concluye

$$B'(s) = -\kappa_g(s)T(s) - \tau_g(s)N(s).$$

Definición 4.1 *Las ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{lcllr} T'(s) & = & & \kappa_n(s)N(s) & +\kappa_g(s)B(s) \\ N'(s) & = & -\kappa_n(s)T(s) & & +\tau_g(s)B(s) \\ B'(s) & = & -\kappa_g(s)T(s) & -\tau_g(s)N(s) & . \end{array} \right.$$

se llaman ecuaciones de Darboux. *La función*

$$\kappa_g(s) = \langle T'(s), B(s) \rangle$$

se llama curvatura geodésica y

$$\tau_g(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$$

se llama torsión geodésica.

De la primera ecuación de Darboux, concluimos

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

donde $\kappa = |T'|$ es la curvatura de la curva.

Proposición 4.2 *Con la notación anterior, tenemos*

1. *α es una geodésica sii $\kappa_g = 0$ sii $\kappa = |\kappa_n|$.*
2. *α es línea de curvatura sii $\tau_g = 0$.*
3. *α es línea asintótica sii $\kappa_n = 0$.*

En el caso que la curva sea una geodésica, entonces $\alpha''(s)$ es proporcional a $N(s) = N(\alpha(s))$, luego salvo un cambio de orientación en la superficie, podemos suponer que coincide con el normal de la curva. Denotamos por $\{T, n, b\}$ el triedro de Frenet de la curva. Hemos probado así:

Corolario 4.3 *Si α es una geodésica en una superficie S, entonces se puede orientar S de manera que los triedros de Frenet y de Darboux de la curva α coinciden. En particular, $\kappa_n = \kappa$ y $\tau = \tau_g$.*

Igual que sucedía con la curvas, nos preguntamos cómo se calcula κ_g y τ_g cuando la curva no está parametrizada por el arco. Del mismo modo, lo que hacemos es reparametrizar por el arco y calcular todos los elementos en esta nueva reparametrización. La cuenta nos hará ver que no depende de la reparametrización. Así, sea $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ una reparametrización por el arco de la curva α, teniendo así $|\phi'(s)| = |\alpha'(t)|$. Entonces

$$\beta' = \phi'\alpha', \quad \beta'' = \phi''\alpha' + \phi'^2\alpha''.$$

El vector normal N no cambia, sólo la notación $N(s) = N(\beta(s)) = N(\alpha(\phi(s))) = N(t)$. El vector $B(s)$ es $B = \phi'\alpha' \times N$, luego

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times N(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

Para la curvatura geodésica:

$$\kappa_g(s) = \langle \phi''\alpha' + \phi'^2\alpha'', \phi'\alpha' \times N = \langle \phi'^2\alpha'', \phi'\alpha' \times N.$$

Por tanto

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \times N(t)}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Para la curvatura normal no hay que hacer nada, ya que la curvatura normal es la segunda forma fundamental aplicada al vector tangente unitario. De todas formas, podemos hacer el mismo tipo de cuentas que antes y obtener lo que se esperaba:

$$\kappa_n(s) = \langle \beta'', N \rangle = \langle \phi''\alpha' + \phi'^2\alpha'', N \rangle = \langle \phi'^2\alpha'', N \rangle.$$

Por tanto

$$\kappa_n(t) = \frac{\langle \alpha''(t), N(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^2}.$$

Y por la definición

$$\kappa_n(t) = \sigma_{\alpha(t)}\left(\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\right) = \frac{\sigma_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}{|\alpha'(t)|^2},$$

obteniendo lo mismo. Para la torsión geodésica, hay que observar que $N'(s)$ quiere decir, $\frac{d}{ds}N(\beta(s))$. Entonces

$$N'(s) = \frac{d}{ds}N(\alpha(\phi(s))) = (dN)_{\alpha(t)}(\phi'(s)\alpha'(t)) = \phi'(s)(dN)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \frac{N'(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

Por tanto,

$$\tau_g(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle = \frac{\langle N'(t), B(t)\rangle}{|\alpha'(t)|^2} = \frac{\langle N'(t), \alpha'(t)\times N(t)\rangle}{|\alpha'(t)|^2}.$$

Resumimos del siguiente modo:

Proposición 4.4 *Si α es una curva en una superficie, tenemos:*

$$\kappa_n(t) = \frac{\langle \alpha''(t), N(t)\rangle}{|\alpha'(t)|^2}$$

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\times N(t)}{|\alpha'(t)|^3}$$

$$\tau_g(t) = \frac{\langle N'(t), \alpha'(t)\times N(t)\rangle}{|\alpha'(t)|^3},$$

donde $N(t) = N(\alpha(t))$.

5. Isometrías

Las isometrías entre superficies van a ser los difeomorfismos que van a preservar todos los conceptos métricos (distancia, longitud, ángulos, etc).

Definición 5.1 *Una isometría $\phi : S \to S'$ es un difeomorfismo tal que $(d\phi)_p$ es una isometría para todo p. Si sólo pedimos que sea diferenciable, entonces ϕ se llama isometría local*

Es evidente que toda isometría local es una isometría. También que 'ser isométricos' es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las superficies.

El ejemplo típico de isometría es la restricción de un movimiento rígido. El siguiente resultado es evidente.

Proposición 5.2 *Sea $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido. Si S es una superficie, entonces $M_{|S} : S \to M(S)$ es una isometría.*

Proposición 5.3 *Sea $\phi : S \to S'$ una isometría. Entonces ϕ preserva:*

1. *longitudes de curvas.*
2. *ángulos entre curvas*[3]*.*
3. *distancias entre puntos.*
4. *los coeficientes de la primera forma fundamental.*
5. *los símbolos de Christoffel.*
6. *geodésicas.*

Demostración. Los dos primeros apartados son evidentes. El tercero es consecuencia del primero. Para el cuarto, estamos entendiendo lo siguiente. Sea $X : U \to V \subset S$ una parametrización. Como ϕ es un difeomorfismo, entonces $Y := \phi \circ X : U \to \phi(V) \subset S'$ es una parametrización de S'. Los coeficientes de la primera forma fundamental para las parametrizaciones para X (E, F, G) y para Y $(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G})$ están definidos en el mismo dominio, a saber, U. Estamos diciendo pues

$$E = \bar{E}, F = \bar{F}, G = \bar{G}.$$

La demostración es sencilla, pues,

$$\bar{E} = \langle Y_u, Y_u \rangle = \langle (d\phi)_X(X_u), (d\phi)_X(X_u) \rangle = \langle X_u, X_u \rangle = E.$$

Si ϕ preserva los coeficientes de la primera forma fundamental, también los símbolos de Christoffel, en el mismo sentido que antes. Y por tanto, también, las geodésicas, ya que localmente, éstas son soluciones (2), donde las funciones que aparecen dependen de los símbolos de Christoffel. $\square$

El resultado anterior también es válido para isometrías locales, en el sentido que se preserva todo en abiertos.

Ya que preserva los símbolos de Christoffel, también la curvatura de Gauss, por el teorema Egregium. Así que ampliamos el enunciado de éste del siguiente modo.

Teorema 5.4 (Egregium) *La curvatura de Gauss sólo depende de la métrica. Además, si $\phi : S \to S'$ es una isometría local, la curvatura de Gauss se preserva, es decir,*

$$K' \circ \phi = K.$$

[3] Si $\alpha, \beta : I \to S$ son dos curvas, con $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, se llama el ángulo entre α y β en t_0 al ángulo de los vectores $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(t_0)$.

Por tanto:

1. Un abierto de un plano no es isométrico a un abierto de la esfera. Esto nos dice que no podemos hacer a escala un mapa de la Tierra. Del mismo modo, tampoco un abierto de un cilindro es isométrico a un abierto de la esfera.

2. Un abierto de un plano, un abierto de la esfera y un abierto de la pseudo esfera no pueden ser isométricos entre sí.

3. Una superficie de curvatura de Gauss constante no puede ser isométrica a una superficie con curvatura de Gauss no constante.

4. Una isometría entre dos superficies preserva el carácter de los puntos atendiendo a su curvatura de Gauss, es decir, el hecho de ser un punto elíptico, hiperbólico, parabólico o llano.

Podemos darle la vuelta a la proposición en el siguiente sentido.

Proposición 5.5 *Sea X una parametrización de una superficie S y $\phi : S \to S'$ un difeomorfismo. Consideramos en S' la parametrización $Y = \phi \circ X$. Si los coeficientes de la primera forma fundamental de X e Y son iguales, entonces*

$$\phi : X(U) \to Y(U)$$

es una isometría.

Demostración. Basta ver que $(d\phi)_p$ preserva la métrica para una base de T_pS para todo $p \in X(U)$. Tomamos como base $\{X_u, X_v\}$. Una base de $T_{\phi(X(u,v))}S'$ es $\{Y_u, Y_v\}$. Entonces la hipótesis nos dice que justamente la métrica se mantiene para esas bases, luego $(d\phi)_p$ es una isometría. $\square$

Podemos aplicar el resultado anterior para calcular geodésicas de una superficie si sabemos que es isométrica (al menos localmente) a otra de la que conocemos sus geodésicas. El ejemplo más sencillo es entre un plano y un cilindro. Consideramos el plano S de ecuación $z = 0$, del cual sabemos que todas sus geodésicas son todas las rectas del plano. Por otro lado, para un cilindro circular de radio $r > 0$, $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}$, la parametrización

$$Y(t, \theta) = (r \cos \frac{\theta}{r}, r \sin \frac{\theta}{r}, t)$$

tiene como coeficientes de la primera forma fundamental $E = 1$, $F = 0$ y $G = 1$, lo mismo que para la parametrización $X(x, y) = (x, y, 0)$ del plano S. Entonces la aplicación

$$\phi : S \to \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}, \quad \phi = Y \circ X^{-1}$$
$$\phi(x, y, 0) = (r \cos \frac{x}{r}, r \sin \frac{x}{r}, y)$$

es una isometría local. Dicha aplicación no es más que enrollar el plano $z = 0$ a lo largo de las rectas horizontales. Como las geodésicas de S son las rectas, las de $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{R}$ son las que se obtienen de enrollar dichas rectas. Así,

1. Las rectas horizontales $y = ct$ se enrollan en círculos (horizontales).

2. Las rectas verticales $x = ct$ son rectas (verticales) en el cilindro.

3. Las rectas oblicuas $y = ax + b$ se enrollan en hélices: si dicha recta se parametriza como $\alpha(t) = (t, a + b, 0)$, entonces

$$\phi(\alpha(t)) = (r \cos \frac{t}{r}, r \sin \frac{t}{r}, at + b),$$

   que es justamente la ecuación de una hélice circular de $\mathbb{R}^3$.