Notas y observaciones sobre el tema 3

Asignatura: Curvas y Superficies
Grado en Matemáticas
Grupo: 3^0-B
Profesor: Rafael López Camino

---

1. Algunas técnicas para probar que un conjunto es una superficie

Teorema 1.1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ con la propiedad de que para cada $p \in S$, existe un abierto $p \in V \subset S$ tal que V es una superficie. Entonces S es una superficie.*

Demostración. Sea $p \in S$ y probamos que para p existe una parametrización. Por hipótesis, existe un abierto $V \subset S$ de p que es una superficie. Por tanto, existe $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to W \subset V \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización para la superficie V. Veamos que $X : U \to W$ también es una parametrización *de* S. Observemos que X es un homeomorfismo (transitividad de las topologías inducidas), $X : U \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable y que el rango de la derivada es 2 (es una cuestión local).

Lo único que queda es probar que W es un abierto en S. Pero esto es cierto ya que $W \subset V \subset S$ es un abierto de V y V también lo es de S. $\square$

Corolario 1.2 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ con la propiedad $S = \cup_{i \in I} S_i$ donde $S_i \subset S$ es un abierto y una superficie. Entonces S es una superficie.*

Aplicamos el corolario anterior para probar que $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie. Consideramos el abierto $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ y la función $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y tomamos las siguientes seis superficies (grafos de funciones):

$$S_1 = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}, \quad S_2 = \{(x, y, -f(x, y)) : (x, y) \in D\}.$$

$$S_3 = \{(x, f(x, z), z) : (x, z) \in D\}, \quad S_3 = \{(x, -f(x, z), z) : (x, z) \in D\}.$$

$$S_5 = \{(f(y, z), y, z) : (y, z) \in D\}, \quad S_6 = \{(f(y, z), y, z) : (y, z) \in D\}.$$

Entonces $\mathbb{S}^2 = S_1 \cup \ldots \cup S_6$. Además, cada $S_i \subset \mathbb{S}^2$ es un conjunto abierto de $\mathbb{S}^2$, ya que es la intersección de la esfera con un semiespacio abierto de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, para S_1, tenemos

$$S_1 = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}.$$

2. Superficies de revolución

Existen dos posibles definiciones de lo que es una superficie de revolución:

1. Una superficie es de revolución es una *superficie* que es invariante por un grupo uniparamétrico de rotaciones respecto de una recta dada.
2. Una superficie que se obtiene al girar una curva mediante un grupo uniparamétrico de rotaciones respecto de una recta dada. Concretamente, tomamos una curva contenida en un plano que contiene al eje (la recta dada), y la hacemos girar respecto de éste.

Para la definición (1), la superficie tiene una propiedad geométrica 'añadida'. Para la definición (2), tenemos una forma de 'construir' superficies. Algunas preguntas que surgen son:

1. ¿Una superficie del tipo 1) es obtenida mediante una construcción del tipo de la definición (2)?
2. ¿Una superficie del tipo (2) es del tipo (1)?

Nos centramos en la definición (2) ya que vamos a girar una curva y preguntarnos cuándo el conjunto que genera es una superficie.

Sin perder generalidad, podemos suponer que el eje L es el eje z y que el grupo es

$$G_L = \left\{ G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tomamos el plano xz como el plano P que va a contener a la curva. Es natural exigir algunas hipótesis respecto de la curva α contenida en P y que va a generar la superficie. Por ejemplo:

1. La curva tiene que ser regular. En caso contrario, se perdería la propiedad de que la el rango de la derivada es máximo.
2. No puede intersecar L, ya que en caso contrario, al girar, se formaría un 'pico' en la superficie, perdiendo la diferenciabilidad.
3. También hay que exigir que la curva α no se autointerseque porque entonces la superficie también se autointersecaría[1].

Tomamos la curva $\alpha : I \to P \subset \mathbb{R}^3$, que se escribirá como $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$, $t \in I$. Imponemos que α no corta L, , por ejemplo que $f > 0$[2]. Entonces al girar α sobre L obtenemos el siguiente

[1] Nos estamos refiriendo a que la *traza* de la curva no se 'autointerseque'. Si estamos considerando la curva como una curva parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, es posible que la curva no sea inyectiva, pero esté en buenas condiciones. Esto sucede si $\alpha(t) = (\cos(t), 0, \sin(t))$, que no es inyectiva con $t \in \mathbb{R}$, pero la *traza* no se autointerseca.

[2] Sólo haría falta poner que $f(t) \neq 0$, pero entonces la curva α no sería conexa al estar separada por el plano $x = 0$. Como estamos suponiendo que α está definida en un intervalo I, entonces $\alpha(I)$ es conexa, luego necesariamente $f(t) > 0$ en I, o $f(t) < 0$ en I.

conjunto:

$$\begin{aligned} S &= \{G(\theta)(\alpha(t)) : t\in I, \theta\in\mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} : t\in I, \theta\in\mathbb{R} \right\} \\ &= \{(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t)) : t\in I, \theta\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Antes de probar que es una superficie, observemos que S es invariante por G_L, y por tanto, en cuanto se pruebe que es una superficie, sería una superficie según la definición (1). La clave se encuentra en que G_L es un grupo con $G(\theta)\circ G(\varphi) = G(\theta+\varphi)$.

Proposición 2.1 *El conjunto S definido anteriormente satisface*

$$S = G(\varphi)(S), \quad \forall\varphi\in\mathbb{R}.$$

Demostración. Por doble inclusión. Si $p\in S$, existe $\theta\in\mathbb{R}$ y $t\in I$ tal que $p = G(\theta)(\alpha(t))$. Entonces

$$p = (G(\varphi)\circ(G(-\varphi)(G(\theta)(\alpha(t))) = G(\varphi)(G(-\varphi+\theta)(\alpha(t))) \in G(\varphi)(S),$$

pues $p = G(-\varphi+\theta)(\alpha(t))\in S$. Por otro lado, si $p\in S$ y $\varphi\in\mathbb{R}$, entonces $p = G(\theta)(\alpha(t))$ para algún $\theta\in\mathbb{R}$ y

$$G(\varphi)(p) = G(\varphi)(G(\theta)(\alpha(t))) = G(\varphi+\theta)(\alpha(t)) \in S.$$

□

Previamente a probar que es una superficie, uno podría hacer la siguiente consideración. Definimos la aplicación

$$X : I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, \quad X(t,\theta) = (f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t)). \tag{1}$$

Observemos que $X(I\times\mathbb{R}) = S^3$. Entonces X es diferenciable y es fácil probar que rango$(dX) = 2$. Esto probaría que X es una *superficie parametrizada*, o dicho de otro modo, para cada $(t_0,\theta_0)\in I\times\mathbb{R}$, existe un abierto $(t_0,\theta_0)\in W\subset\mathbb{R}^2$ tal que $X(W)$ es una superficie. Aunque esto *no prueba* que el conjunto S es una superficie, sí lo es 'localmente' en el sentido expresado anteriormente.

Definitivamente, pasamos a demostrar que S es una superficie *si* a la curva α añadimos las hipótesis *convenientes* para que tener asegurada la primera propiedad de superficie, es decir, aquélla que la que la parametrización es un homeomorfismo. Por eso suponemos

> La curva $\alpha : I\to\mathbb{R}^3$ es un embebimiento, es decir, $\alpha : I\cong\alpha(I)$.

Para probar que S es una superficie vamos a utilizar el teorema 1.1.

Ya suponemos que la dificultad va a ser probar que la parametrización sea un homeomorfismo. Ya anunciamos que hay que distinguir casos según dónde se encuentra el punto de S. Antes de distinguir los casos, veamos dónde radica el problema.

[3]Como $I\times\mathbb{R}$ es conexo, S es conexa al ser imagen continua de un conexo.

Tomamos un punto $p \in S$, y tomamos como parametrización la misma X que la dada en (1), sólo hay que estudiar cuál es su dominio, ya que la diferenciabilidad, y la propiedad sobre el rango de la derivada, sigue siendo ciertas. Para la inversa de la aplicación X podemos hacer lo siguiente.

Si $(x, y, z) \in S$, entonces $(x, y, x) = (f(t) \cos\theta, f(t) \sin\theta, g(t))$ para algún t y θ. Cambiando θ por un apropiado $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos suponer que $\theta \in [0, 2\pi]$. También sabemos $x^2 + y^2 = f(t)^2$, es decir, $f(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$. También que $z = g(t)$. Como $\alpha : I \to \alpha(I)$ es un homeomorfismo, entonces $t = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$.

Para obtener θ, podemos intentar con $y/x = \sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$, pero tenemos que asegurarnos que $x \neq 0$ y luego tomar la función arco tangente. Para tomar la función arco tangente, tenemos que restringir aún más el intervalo $[0, 2\pi]$. La función $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to (-\infty, \infty)$ es un homeomorfismo. Por tanto, consideramos que el dominio de X es $I \times (-\pi/2, \pi/2)$ y así

$$X : I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to X(I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) := V \subset S.$$

Entonces

$$X^{-1} : V \to I \times (0, \frac{\pi}{2}),\ X^{-1}(x, y, z) = (\alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \text{arc } \tan(y/x)),$$

probando que X^{-1} es continua.

Siguiendo el teorema 1.1, queda por probar que $V = X(I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ es un conjunto abierto de S. Pero es evidente que

$$V = X(I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = S \cap ((0, \infty) \times \mathbb{R}^2).$$

¿Cómo probar la propiedad de superficie para los restantes puntos? Tenemos dos argumentos diferentes para acabar.

1. Sea ahora otro $p \in S$. Este punto es de la forma $p = X(t, \theta)$, para algún $\theta \in [0, 2\pi]$. Si el valor θ se encuentra en $(\pi/2, 3\pi/2)$, entonces entonces el dominio de X cambia por $I \times (\pi/2, 3\pi/2)$. Y si el punto se corresponde con $\theta = \pi/2$ o $3\pi/2$, cambiamos el dominio por $I \times (0, \pi)$, $I \times (\pi, 2\pi)$, dependiendo del caso, y en vez de tomar la función arco tangente, tomamos arco cotangente y definir X^{-1} como

$$X^{-1}(x, y, z) = (\alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \text{arc } \cot(x/y)).$$

   La prueba de que $X(I \times (0, \pi))$ y $X(I \times (\pi, 2\pi))$ es abierto es análoga, pero poniendo ahora $S \cap (\mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R})$ o $S \cap (\mathbb{R} \times (0, -\infty) \times \mathbb{R})$.

2. Consideramos un giro $G(\theta) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$. Recordemos que $G(\theta)_{|S} : S \to S$. Entonces

$$G(\theta)(V) = G(\theta)(X(I \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})))$$

   es una superficie, pero también es un abierto de S, ya que $G(\theta) : S \to S$ es un homeomorfismo. Por último, hay que darse cuenta que

$$G(\theta) \circ X = X : I \times (-\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{\pi}{2} + \theta) \to S,$$

y de esta forma, haciendo variar θ, vamos cubriendo todos los puntos de S. Aplicamos ahora el teorema 1.1. En verdad, basta con considerar sólo *tres* ángulos más, por ejemplo, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$.

Realizamos otra prueba de que S es una superficie, evitando el uso de la función arco tangente y arco cotangente.

Como antes, el problema radica en que usamos la misma parametrización, pero hay que considerar el dominio apropiado para poder tomar la inversa de X. Se define

$$\beta : (0, 2\pi) \to \beta((0, 2\pi)) \subset \mathbb{R}^2, \quad \beta(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

Esta aplicación es un homeomorfismo. Volvemos a tomar la aplicación X definida ahora en el intervalo $I \times (0, 2\pi)$ y buscamos la inversa. De nuevo, si $(x, y, z) \in X(I \times (0, 2\pi))$, entonces $t = \alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$. Por otro lado, como $(x, y) = f(t)\beta(\theta)$, y β es biyectiva, tomamos

$$\theta = \beta^{-1}\left(\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Entonces

$$X^{-1}(x, y, z) = \left((\alpha^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z), \beta^{-1}\left(\frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right).$$

Por tanto, el conjunto V es

$$V = X(I \times (0, 2\pi)).$$

Sólo queda probar que es un conjunto abierto. Pero basta darse cuenta que

$$V = S - \alpha(I) = S - (S \cap \{(x, 0, z) : x \geq 0\})$$

y $\{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$.

Para finalizar, habría que encontrar parametrizaciones para los puntos correspondientes a $\theta = 0$[4]. Pero ahora usamos argumentos como los que han aparecido, que consisten, por ejemplo, en hacer un pequeño giro de ángulo θ (por ejemplo $\theta = \pi/2$ a la anterior parametrización y recubrir así toda la superficie.

Resumimos los probado:

Teorema 2.2 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ un embebimiento de una curva cuya traza se encuentra en el semiplano $\{(x, 0, z) : x > 0\}$. Entonces $S = \{G(\theta)(\alpha(t)) : t \in I, \theta \in \mathbb{R}\}$ es una superficie con la propiedad de que es invariante por giros cuyo eje es el eje z.*

Este resultado se puede llevar al siguiente contexto. En vez de tener un embebimiento, podemos cambiar por una curva plana que sea cerrada y no se autointerseque. Por ejemplo, si tomamos una circunferencia en el semiplano $P^+ = \{(x, 0, z) : x > 0\}$, la superficie que se obtiene es un toro de revolución. Para formalizar esto, consideramos curvas planas $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ colocadas en P^+ con las dos siguientes propiedades:

[4]Obsérvese que $S \cap \{(x, 0, z) : x > 0\} = \alpha(I) = X(I \times \{0\})$.

1. La aplicación α es periódica, es decir, existe $T > 0$ tal que $\alpha(t+T) = \alpha(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. La aplicación $\alpha : [0,T) \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva. Como consecuencia del apartado anterior, y usando un argumento topológico de identificaciones, $\alpha(\mathbb{R}) = \alpha([0,T])$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Una curva así se llama una curva *cerrada y simple*. Sea $C = \alpha(\mathbb{R})$. Es fácil probar que para cada $p \in C$ existe un abierto en de p en C que es la traza de un embebimiento de α definido en un intervalo de $\mathbb{R}$.

Con unos argumentos parecido a los del teorema 2.2, tenemos:

Teorema 2.3 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva cerrada y simple cuya traza se encuentra en el semiplano $\{(x,0,z) : x > 0\}$. Entonces $S = \{G(\theta)(\alpha(t)) : t \in I, \theta \in \mathbb{R}\}$ es una superficie con la propiedad de que es invariante por giros cuyo eje es el eje z.*

3. Superficies dadas como imagen inversa de un valor regular

Esta parte viene motivada por un resultado de sistemas de ecuaciones lineales que nos dice que si tenemos m ecuaciones linealmente independientes con n incógnitas, el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de dimensión $n - m$. Ponemos $m = 1$ y $n = 3$. Entonces el conjunto de soluciones de una ecuación (no trivial) con tres incógnitas es un plano vectorial.

Pasamos ahora de sistemas de ecuaciones lineales a simplemente 'ecuaciones'. Todo el mundo entiende que en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$,

> "*una ecuación en tres variables define un conjunto de dimensión* 2."

En el contexto de superficies, 'conjunto de dimensión 2' quiere decir 'superficie'. Queremos formalizar todo esto. El ejemplo de superficie que nos va a motivar es la esfera que viene dada por $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$. Entonces $\mathbb{S}^2$ es el conjunto de ceros de la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Para ello, hay que generalizar/formalizar el hecho de 'ecuaciones linealmente independientes' que habíamos dicho para sistemas de ecuaciones lineales.

Sea $f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un número $a \in \mathbb{R}$ se llama *valor regular de f* si todo $p \in f^{-1}(\{a\})$ no es un punto crítico de f, es decir, $(df)_p \neq 0$[5]. En el caso de la esfera, si calculamos la derivada y los puntos críticos, tenemos

$$(df)_{(x,y,z)} = (2x, 2y, 2z).$$

Luego el único punto crítico es $(x,y,z) = (0,0,0)$, y el único valor que no es regular es $f(0,0,0) = -1$. Por tanto, $a = 0$ es un valor regular de f.

[5]Esta propiedad es equivalente a decir que $(df)_p$ es sobreyectiva. Recordemos que la derivada es una aplicación lineal, en este caso, $(df)_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Por tanto, decir que $(df)_p \neq 0$ es lo mismo que decir que la imagen de dicha aplicación lineal tiene dimensión 1, es decir, es sobreyectiva. Esto lo tendremos presente cuando generalicemos el teorema 3.1 a los toremas 3.3 y 3.4.

Teorema 3.1 *Sea $f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$ un valor regular. Entonces $S = f^{-1}(\{a\})$ es una superficie.*

Para la demostración, usaremos el teorema de la función inversa del análisis matemáticas, y que enunciamos ahora:

Teorema 3.2 (función inversa) *Sea $f : O_1 \times O_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, $p = (x_0, y_0) \in O_1 \times O_2$ y escribimos*

$$(df)_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Supongamos que rang$(df)_p = m$, y sin perder generalidad, que

$$det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(p) \neq 0.$$

Si $f(p) = a$, existen abiertos $V_i \subset O_i$, $x_0 \in V_1$, $y_0 \in V_2$, tal que:

1. *Para cada $x \in V_1$ existe un único $y \in V_2$ con la propiedad $f(x, y) = a$.*
2. *La aplicación $g : V_1 \to V_2$ que lleva x en y con la propiedad $f(x, g(x)) = a$, es diferenciable.*

Demostración. [del teorema 3.1] Para probar que es una superficie, vamos a probar que todo punto de S tiene un abierto que es una superficie, y aplicamos el teorema 1.1. Concretamente, vamos a probar que para cada punto de S existe un abierto que es el grafo de una función, y se sabe que el grafo de una función es una superficie.

Sea $p \in S$, $p = (x_0, y_0, z_0)$ y ya que $(df)_p \neq 0$, supongamos $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$. Aplicamos el teorema de la función inversa del siguiente modo: tomamos un abierto de la forma $((x_0, y_0), z_0) \in O_1 \times O_2 \subset O \subset \mathbb{R}^3$ y $f : O_1 \times O_2 \to \mathbb{R}$. Observemos que estamos en las hipótesis, ya que rango$(df)_p = 1$ pues es equivalente a decir que $(df)_p \neq 0$. Usando la notación del teorema de la función inversa, éste nos dice

$$(V_1 \times V_2) \cap S = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in V_1\} = \text{grafo}(g).$$

Por tanto, $(V_1 \times V_2) \cap S$ es un abierto de S que contiene a p y es una superficie al ser el grafo de $g : V_1 \to \mathbb{R}$. □

Volvemos al caso de la esfera para ver qué dice la demostración anterior. Ya que estamos usando el teorema de la función implícita, se está despejando una variable en términos de las otras dos. Tomamos el punto $p = (0, 0, 1)$. La derivada de f en p es $(df)_p = (0, 0, 2)$. Como $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$, podemos despejar z en función de (x, y). Aquí $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y $a = 1$. Entonces en un abierto $V_1 \subset \mathbb{R}^2$ que contiene a $(0, 0)$, la función

$$z = g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

es diferenciable y $(V_1 \times V_2) \cap \mathbb{S}^2$ es un abierto de $\mathbb{S}^2$ que es grafo de g. Sabemos que el abierto V_1 más grande es el disco D[6].

[6] Observemos que el teorema de la función implícita (o inversa9 no nos informan de cuán de grande son los dominios de definición.

Si el punto es ahora $p=(0,1,0)$, ya sabemos que no podemos despejar z en función de (x,y) en un entorno de p. Esto se debe a lo siguiente. Si seguimos la demostración del teorema de la función inversa, la derivada f en p es: $(df)_p=(0,2,0)$. Ahora $\frac{\partial f}{\partial y}(p)\neq 0$ luego podemos despejar y en función de las otras variables, a saber,

$$y=g(x,z)=\sqrt{1-x^2-z^2}.$$

Extendemos el teorema 3.1 de dos formas: primero, reduciendo la dimensión del dominio y obteniendo un resultado de curvas planas, y por otro, aumentando la dimensión en el codominio, obteniendo un resultado de curvas espaciales.

Teorema 3.3 *Sea $f:O\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función diferenciable y $a\in\mathbb{R}$ un valor regular. Entonces $C=f^{-1}(\{a\})$ es una curva regular en el siguiente sentido: para cada $p\in C$, existe $V\subset C$ un conjunto abierto en C con $p\in V$ tal que que V es la traza de una curva parametrizada regular de $\mathbb{R}^2$.*

Teorema 3.4 *Sea $f:O\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una función diferenciable y $a\in\mathbb{R}$ un valor regular, es decir, para cada $p\in f^{-1}(\{a\})$, rango$(df)_p=2$. Entonces $C=f^{-1}(\{a\})$ es una curva regular en el siguiente sentido: para cada $p\in C$, existe $V\subset C$ un conjunto abierto en C con $p\in V$ tal que que V es la traza de una curva parametrizada regular de $\mathbb{R}^3$.*

4. Superficies, grafos de funciones e imágenes inversas

De la familia de ejemplos, podemos destacar dos: grafos de funciones y superficies que son imágenes inversas de un valor regular. Vamos a probar que toda superficie, *localmente*, se puede escribir de las dos formas anteriores.

De la demostración del teorema 3.1, pero usando el teorema de la función inversa, probamos que toda superficie es localmente el grafo de una función, concretamente:

Teorema 4.1 *Sea S una superficie y $p\in S$. Entonces existe un abierto $p\in V\subset S$ tal que V es el grafo de una función sobre alguno de los tres planos coordenados.*

Demostración. Sea $p\in S$ y $X:U\to V'\subset S$ una parametrización alrededor de p. Como en $q=X^{-1}(p)$ el rango de $(dX)_q$ es 2, podemos suponer que si $X(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)$, entonces

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}(q)\neq 0. \tag{2}$$

Si $\pi(x,y,z)=(x,y)$ es la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy, entonces (2) dice que la función $F=\pi\circ X:U\to\mathbb{R}^2$ satisface que $(dF)_q$ es un isomorfismo. El teorema de la función inversa nos decir que existe un abierto $q\in U'\subset U$ y $W\subset\mathbb{R}^2$ abierto tal que $F:U'\to W$ es un difeomorfimo. Si $Y=X\circ F^{-1}:W\to Y(W):=V$ (V es abierto en V' y por tanto, en S), tenemos

$$\begin{aligned} V &= \{Y(u',v'):(u',v')\in W\}=\{(x\circ F^{-1})(u',v'),(y\circ F^{-1})(u',v'),(z\circ F^{-1})(u',v'):(u',v')\in W\} \\ &= \{(F\circ F^{-1})(u',v'),(F\circ F^{-1})(u',v'):(u',v')\in W\} \\ &= \text{grafo}(f), \qquad f=z\circ F^{-1}. \end{aligned}$$

□

De la demostración se deduce que el plano coordenado sobre el que es grafo es aquél correspondiente a los dos variables en el que el menor de orden 2 del jacobiano de X no es cero. Como consecuencia de este resultado, podemos ahora probar que ciertos subconjuntos del espacio euclídeo que aparentaban que no eran superficies, no son, efectivamente, superficies. Nos referimos a conjuntos con 'picos' y conjuntos 'con borde'.

1. El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es una superficie. En el punto $p = (0, 0, 0)$ hay un 'pico', y va a fallar la propiedad de la diferenciabilidad. Por el teorema 4.1, existe un abierto de p que es grafo sobre uno de los planos coordenados. Como es evidente que no puede ser grafo sobre el plano xy o sobre el plano yz, necesariamente es sobre el plano xy. Pero en tal caso, la superficie tiene que ser el grafo de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sin embargo el punto p se corresponde con $x_0, y_0) = (0, 0)$ y f no es diferenciable en el origen.
2. Consideramos es casquete esférico $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \geq 1/2\}$. Esta superficie tiene una curva 'borde', concretamente la intersección $S \cap \{z = 1/2\}$. Tomamos el punto $p = (\sqrt{3}/2, 0, 1/2) \in S$. Por el teorema, existe un abierto V de p tal que esta superficie es un grafo de una cierta función f definido sobre un abierto U de uno de los planos coordenados. Denotamos π la correspondiente proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ y se tiene $\pi(V) = U$. No puede ser un grafo sobre el plano xz, luego tiene que ser sobre yz o sobre xy.

   En el primer caso, la proyección de V está en $P = (y, z) : z \geq 1/2\}$ y conteniendo al punto $(0, 1/2$. Sin embargo, $\pi(V) = U$ es un abierto, que al contener a p, no puede estar contenido en P, llegando a una contradicción.

   En el segundo caso, la proyección de V está en el disco $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1/4\}$ del xy-plano y contiene al punto $(\sqrt{3}/2, 0)$. Sin embargo, $\pi(V) = U$ es un abierto, que al contener a p, no puede estar contenido enteramente en D, llegando a una contradicción.

Para la otra parte de este apartado, recordemos que en la demostración del teorema 3.1 se probaba que todo punto de la superficie es grafo de una función.

Por el teorema anterior, ya sabemos que toda superficie es, localmente, el grafo de una función, luego localmente se puede escribir como $z = f(x, y)$ para cierta función. Es natural entonces definir $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ y tomar imagen inversa del 0.

Teorema 4.2 *Sea S una superficie y $p \in S$. Entonces existe un abierto $p \in V \subset S$, un abierto $O \subset \mathbb{R}^3$ y una función $F = O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $V = F^{-1}(\{0\})$ y 0 es un valor regular de F.*

Demostración. Del teorema 4.1 sabemos que existe $p \in V \subset S$ tal que $V = \text{grafo}(f)$, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sea $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ y veamos dónde hay que definir la función F. Un primer intento es el siguiente. Como V es un abierto de S, $V = S \cap O'$, donde O' es un abierto de $\mathbb{R}^3$. Entonces tomamos $F : O' \to \mathbb{R}$. Es evidente que $(dF)_{(x,y,z)} = (-f_x, -f_y, 1)$, luego no hay puntos críticos. Si hacemos $F^{-1}(\{0\})$, es evidente que $V' \subset F^{-1}(\{0\})$, pero la otra inclusión no está clara. Y menos claro es si F está 'bien definida': esto sólo sucede si las coordenadas (x, y) de los puntos de O' están en U.

Evitamos los problemas intersecando O' con el paralepípedo con base U, es decir, $U \times \mathbb{R}$ y definir $O = (U \times \mathbb{R}) \cap O'$ y

$$V = (U \times \mathbb{R}) \cap V = O \cap S.$$

De esta manera, la función $F : O \to \mathbb{R}$ está bien definida. De nuevo, es trivial la inclusión $V \subset F^{-1}(\{0\})$. Sea ahora $(x, y, z) \in F^{-1}(\{0\})$. Entonces $z - f(x, y) = 0$ y $(x, y) \in U$. Luego $(x, y, z) = (x, y, f(x, y)) \in \text{grafo}(f) = V$. $\square$