Examen Parcial (Soluciones)

Cálculo, Grupo D. 30 Noviembre 2015

Ejercicio 1 **(2 pts)** Halla para qué valores de x se verifica la siguiente inecuación

$$x^3 > |4x||x-1|.$$

Solución

Para resolver la inecuación, se debe desarrollar el valor absoluto que aparece en el lado derecho mediante la definición del mismo. Observa que mediante las propiedades del valor absoluto vistas en clase y hallando las raíces de $4x(x-1)$ -expresión factorizada-, sabemos que

$$|4x||x-1| = |4x(x-1)| = \begin{cases} -4x(x-1), & \text{si } x \in [0,1], \\ 4x(x-1), & \text{si } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Por tanto, en el caso que $x \in [0,1]$, sabemos que resolver inecuación dada es equivalente a resolver $x^3 > -4x(x-1)$. Podemos cancelar un factor x de ambos miembros teniendo en cuenta que si $x = 0$, entonces ambas expresiones son iguales y por tanto 0 no es solución de la inecuación. De esta forma se debe estudiar la expresión $x^2 > -4(x-1)$, que es equivalente a $x^2+4x-4 > 0$. Finalmente, al hallar las raíces del polinomio de segundo grado subyacente, observando que $-2+2\sqrt{2} < 1$, se obtiene que si $-2+2\sqrt{2} < x \leq 1$, entonces se verifica la inecuación.

Por otro lado, en el caso en que $x \notin [0,1]$, de manera análoga al caso anterior, debemos estudiar la inecuación $x^3 > 4x(x-1)$. Al cancelar el factor x, se debe dar cuenta de que en el subcaso $x > 0$, se llega a la expresión $x^2 > -4(x-1)$, equivalente a $(x-2)^2 > 0$; mientras que si $x < 0$, obtenemos la expresión $x^2 < -4(x-1)$, equivalente a $(x-2)^2 < 0$. En el primer subcaso, es claro que la inecuación se verifica en el caso que $x > 1$ salvo en $x = 2$; mientras que en el segundo subcaso nunca se satisface la inecuación.

Por tanto la inecuación planteada se verifica en el conjunto

$$]-2+2\sqrt{2}, 1] \cup]1, +\infty[\setminus \{2\} =]-2+2\sqrt{2}, +\infty[\setminus \{2\}.$$

Ejercicio 2 **(1,5 pts)** Escribe la ecuación de la recta tangente a la función f en el punto $x_0 = 1$, siendo

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}\left(\arctan x^2\right).$$

Solución

Basta recordar la ecuación de la recta tangente a una función en un punto x_0

$$r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Con lo cual, se debe evaluar la función f y f' en $x_0 = 1$, las cuales existen y son continuas. Para hacer este cálculo correctamente, es interesante recordar las propiedades básicas de las funciones trigonométricas básicas.

$$f(1) = 2\,\mathrm{sen}\,(\arctan 1) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Por otro lado, aplicando adecuadamente la regla de la cadena

$$f'(x) = 2\cos\left(\arctan x^2\right)\frac{1}{1+x^4}\,2x, \quad f'(1) = \sqrt{2}.$$

Por tanto, sustituyendo los datos obtenidos, se tiene que

$$r(x) = \sqrt{2} + \sqrt{2}(x-1) = \sqrt{2}x.$$

Ejercicio 3 **(2,5 pts)** Describe la imagen de la función

$$g(x) = \log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right).$$

- Además, calcula

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1}\log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right);$$

- Comprueba que existe al menos una solución de la ecuación

$$\frac{2}{x^2+1}\log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right) = 1.$$

Ayuda: Puedes utilizar los dos apartados anteriores.

Solución

En primer lugar, se puede comprobar fácilmente que el polinomio $x^2 - 2x + e^2 + 1$ no tiene raíces, con lo cual $x^2 - 2x + e^2 + 1 > 0$ y la función g está bien definida en $\mathbb{R}$.

Para hallar la imagen de g, estudiamos la monotonía de g, o lo que es lo mismo estudiar el signo de la función derivada. Hallamos la función derivada g'

$$g'(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x + e^2 + 1}.$$

Teniendo en cuenta que $x^2 - 2x + e^2 + 1 > 0$, el signo de $g'(x)$ es el mismo que $2x - 2$. Ahora, podemos decir que g es estrictamente decreciente en $]-\infty, 1[$, estrictamente creciente en $]1, +\infty[$ y tiene un mínimo en $x = 1$. Por otro lado, es fácil comprobar que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

Así pues, como consecuencia del Teorema del Valor Intermedio, se sabe que

$$f(\mathbb{R}) = \left[g(1), \lim_{x\to-\infty} g(x)\right[\cup \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [2, +\infty[.$$

Es claro que, mediante la escala de infinitos,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} \log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right) = 0.$$

Por último, introducimos la función

$$h(x) = \frac{2}{x^2+1} \log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right) - 1,$$

función que esta bien definida en $\mathbb{R}$.

Aprovechando lo visto en los apartados anteriores se sabe que

$$h(1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} \log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right) - 1 = -1,$$

por tanto se puede aplicar tranquilamente el Teorema de Bolzano para asegurar que existe un $c \in [1, +\infty[$ tal que $h(c) = 0$. Esto garantiza que existe, al menos, una solución a la ecuación dada.

Ejercicio 4 **(2 pts)** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\tan x}}.$$

Solución

Este ejercicio se puede enfocar de varias formas distintas. Una de ellas es empleando la siguiente transormación

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\tan x}} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1 + \frac{x - \tan x}{\tan x}\right)^{\frac{\tan x}{x-\tan x}}\right]^{\left[\frac{x-\tan x}{\tan x}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\tan x}\right]},$$

cuya base sabemos que tiende al número e. Por consiguiente, podemos estudiar el límite del exponente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{\tan x} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \tag{0.1}$$

para llegar a

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\tan x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x-\tan x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{\tan x}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\tan x}} = e.$$

Si no se ataca el límite desde este punto de vista, se puede aplicar la famosa regla del numero e y el ejercicio, de nuevo, se limita a resolver el límite (0.1), obteniendo, evidentemente, el mismo resultado.

Ejercicio 5 **(2 pts)** Sea $f(x) = e^{-x}$

- Halla, si existen, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ y $f^{(n)}(0)$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$;
- Halla el polinomio de Taylor de grado 3 en 0 de $f(x)$;

- Halla el polinomio de Taylor de grado 6 en 0 de $g(x) = e^{-2x^2} - 1$.

Solución

En primer lugar, hallaremos la sucesivas derivadas de la función f, las cuales existen y hemos visto, y repetido, que son continuas

$$f'(x) = -e^{-x}; \quad f''(x) = e^{-x}; \quad f'''(x) = -e^{-x}; \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x},$$

o lo que es lo mismo, la derivada de orden impar es la función opuesta a $f(x)$, $-f(x)$; y la derivada de orden par es la propia función $f(x)$.

Si evaluamos dichas derivadas en 0, se obtiene que

$$f'(0) = -1; \quad f''(0) = 1; \quad f'''(0) = -1; \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n,$$

con lo cual el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 de $f(x)$, notando que $f(0) = 1$ es

$$P_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

Aunque se puede hacer de forma explícita, para hallar el polinomio de Taylor de grado 6 centrado en 0 de $g(x) = f(-2x^2) - 1$, podemos hallar de manera análoga las derivadas sucesivas de g empleando convenientemente la regla de la cadena

$$g'(x) = -4xf'(-2x^2); \quad g''(x) = 16x^2e^{-2x}f''(-2x^2) - 4f'(-2x^2);$$
$$g'''(x) = -64x^3f'''(-2x^2) + 48xf''(-2x^2);$$
$$g^{(4)}(x) = 256x^4f^{(4)}(-2x^2) - 384x^2f'''(-2x^2) + 48f''(-2x^2),$$

y en general

$$g^{(2n-1)} = xh_1(x) + Cf^{(n)}(-2x^2) \quad \text{ y } g^{(2n)} = xh_2(x) + Cf^{(n)}(-2x^2),$$

donde h_1 y h_2 son polinomios de grado $2n-2$ y $2n-1$ respectivamente. Con lo cual, tomando $g^{(4)}$, no es complicado ver que

$$g^{(5)} = h_1(x)x - 192xf'''(-2x^2) \quad \text{ y } \quad g^{(6)} = h_2(x)x - 192f'''(-2x^2)$$

Si evaluamos todas estas expresiones, se obtiene fácilmente que

$$g(0) = 0; \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = -4f'(0) = -4; \quad g'''(0) = 0;$$
$$g^{(4)}(0) = 48f''(0) = 48; \quad g^{(5)} = 0; \quad g^{(6)} = -192.$$

De esta forma podemos llegar a que

$$Q_6(x) = -\frac{4}{2!}x^2 + \frac{48}{4!}x^4 - \frac{192}{6!}x^6 = -2x^2 + 2x^4 - \frac{4}{15}x^6.$$