EJERCICIOS VOLUNTARIOS (REGALO DE NAVIDAD)

- Calcular los siguientes límites:

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_a^{x^2} (1+\frac{1}{t})^t\, dt}{x^2} \qquad \text{donde } a \in \mathbb{R}.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} \operatorname{sen} t\, dt}{x^5+x^6}\ ;$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\cos x-1} e^{-t^2}\, dt}{2x^2+3x^5}\ .$$

Hint: Se puede, y se debe, usar el Teorema Fundamental del Cálculo... Recuerda comprobar que se verifican las hipótesis.

- Calcula las siguientes primitivas

$$(1)\ \int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\, dx\ ;\quad (2)\ \int \frac{x^2-x^3-x-1}{x^3-x^2}\, dx\ ;\quad (3)\ \int \frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}\, dx\ ;$$

$$(4)\ \int \frac{x^3}{x^4+x^2+1}\, dx\ ;\quad (5)\ \int \frac{dx}{x^4+1}\ ;\qquad (6)\ \int \frac{dx}{\cos x}\ ;\qquad (7)\ \int \operatorname{sen}(6x)\cos(3x)\, dx\ ;$$

$$(8)\ \int \frac{\tan x}{1+\cos x}\, dx\ ;\qquad (9)\ \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x}\ ;\qquad (10)\ \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x - 4\operatorname{sen} x - 6}\ ;$$

$$(11)\ \int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x + 5}\ ;\qquad (12)\ \int \frac{1}{3} e^{-x^2}\, dx\ ;\qquad (13)\ \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x - 2\cos x + 1}\ ;$$

$$(14)\ \int \frac{\cos x \operatorname{sen}^2 x\, dx}{1+\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x}\ ;\qquad (15)\ \int \frac{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{5x}{2})\, dx}{\operatorname{sen}^3 x}\ .$$

- Calcula el área del recinto encerrado entre la curva $y = x^3 - x^2 - 6x$ y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 2$.

- Calcula el área del recinto encerrado entre la curva $y = x^3 - x^2 - 6x$, las ordenadas $y = -1$, $y = 0$ y el eje OY.

- Calcula el área de la figura limitada entre las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$.

- Calcula, mediante integrales, el área de una semicircunferencia de radio $r > 0$ centrada en el punto $(0, 1)$.
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$, calcula el área de la región limitada por la hipérbola $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ y la recta $x = 2a$.
- Calcula el área que encierra las funcione seno y coseno en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Calcula el área encerrada por la curva $y = \frac{-x \log x}{(x^2+1)}$, el eje OX y el semiplano $y \geq 0$.
- Calcula el área comprendida entre la curva $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ y sus asíntotas.
- Sea $a, b \in \mathbb{R}^+$ un punto fijado (x_0, y_0) perteneciente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, comprueba que el área del sector formado por el semieje mayor y la recta que une el centro de la elipse y el punto (x_0, y_0) es
$$A = ab \arccos\left(\frac{x_0}{a}\right) = ab \operatorname{arcsen}\left(\frac{y_0}{b}\right)$$
- Calcula la longitud del arco de la curva $y = \log \frac{e^x-1}{e^x+1}$ definida entre $x = 2, x = 4$.
- Calcula la longitud del arco de la curva $y = \log x$ y definida entre $x = \sqrt{3}, x = \sqrt{8}$.
- Calcula la longitud del arco de la curva $y = \log x$ y definida entre $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$.
- Calcula el volumen engendrado por la función $y = \cos x$, al girar alrededor del eje OX, cuando el eje varía entre $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.
- Calcula el volumen engendrado por la función $y = \cos x$, al girar alrededor del eje OY, cuando el eje varía entre $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
- Calcula el volumen y el área del elipsoide con semiejes de longitud $2a, 2b$ respectivamente, es decir la superficie generado por la rotación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ al girar el eje OX.
- Calcula el volumen de la superficie engendrada al girar la región formada por la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ sobre el eje OX.
- Calcula las siguientes integrales
$$(1) \int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}\,; \qquad (2) \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\,; \qquad (3) \int_{-10}^{-1} \log(x^2+4x+4)\,dx\,;$$
$$(4) \int_{-10}^{-1} \frac{2e^x\,dx}{1+e^x+e^{2x}}\,; \qquad (5) \int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,; \qquad (6) \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x \log x}\,.$$