Sucesiones de números reales

1 Sucesiones

Ejercicio 1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Ejercicio 2. Sea a un número real positivo y definamos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero.

Ejercicio 3. Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

E **Ejercicio 4.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

E **Ejercicio 5.** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$. Calcula $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$.

E **Ejercicio 6.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n.

b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

c) Calcula su límite.

Ejercicio 7. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2 Criterios de convergencia

Ejercicio 8. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular su límite cuando exista.

a) $\left\{\dfrac{1 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{n!}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n}{n}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right\}$

Ejercicio 9. Calcula el límite de las siguientes sucesiones

a) $\left\{\dfrac{\log(1 \cdot 2 \cdots n)}{n \log(n)}\right\}$,

b) $\left\{\dfrac{n^2\sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \ldots + n\sqrt{n}}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots \sqrt[n]{n}}{n^2}\right\}$

Ejercicio 10. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(3n+n)}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}}{n+1}\right\}$

Ejercicio 11. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+56n+5}\right\}$

b) $\left\{\left(\dfrac{n^2-5n+6}{n^2+2n+1}\right)^{\frac{n^2+5}{n+2}}\right\}$

c) $\{(1+\log(n+1)-\log(n))^n\}$

Ejercicio 12. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log(n)}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\log(n+1)!}{\log(n+1)^n}\right\}$

Ejercicio 13. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n^2+n+5}\right)^{\frac{1}{1+\log(n)}}\right\}$

b) $\left\{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

c) $\left\{\dfrac{\cos(\sqrt{n^2+1})\log(n)}{n}\right\}$

Ejercicio 14. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\left\{\sqrt[n]{\dfrac{n!}{(2n)^{n+1}}}\right\}$

b) $\left\{\dfrac{\log(n!)}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}\right\}$

E **Ejercicio 15.** Calcula el límite de la sucesión

$$\left\{\frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}\right\}.$$

E **Ejercicio 16.** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\log\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right)^{4n+1}.$$