Derivadas

1 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 1. Calcula la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen

b) $y = \cos(x)$ en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

c) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$

d) $y = |x|$ en $(1, 1)$

Ejercicio 2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}(x + 3)$

b) $y = \cos^2(x)$

c) $y = \frac{1}{\cos(x)}$

d) $y = \sec(x)$

e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Ejercicio 3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.

b) $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$.

c) $f(x) = x^4 e^x \log(x)$.

d) $f(x) = x^x$.

e) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.

f) $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$.

Ejercicio 4. Comprueba que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

Ejercicio 5. Calcula los puntos donde la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ es paralela al eje OX.

Ejercicio 6. Sea $f\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\log(1 - \operatorname{sen}(x)) - 2\log(\cos(x))}{\operatorname{sen}(x)},$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = a$. Estudia para qué valor de a la función f es continua en cero.

E **Ejercicio 7.** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right), & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\log(x)}{x}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Calcula la imagen de la función.

2 Teorema del valor medio

Ejercicio 8. Prueba que $\operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

E **Ejercicio 9.** Demuestra que

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$$

para cualquier x positivo.

E **Ejercicio 10.** Calcula el número de soluciones de la ecuación $x + e^{-x} = 2$.

Ejercicio 11. Calcula el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

E **Ejercicio 12.** Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x).$$

Calcula su imagen.

Ejercicio 13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Encuentra las condiciones que deben verificar los parámetros para que f alcance un máximo y un mínimo relativo.

b) Si se verifica el enunciado anterior, demuestra que en el punto medio del segmento que une los puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo relativo se alcanza un punto de inflexión.

E **Ejercicio 14.** Calcula la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Estudia la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

b) Calcula la imagen de f.

Ejercicio 16. Calcula la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Ejercicio 17. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Demuestra que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

3 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 18. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2^-} \frac{2x - \pi}{\cos(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Ejercicio 19. Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)+3x-1}{2x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos(x)}{x\,\text{sen}(2x)}$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(\log(x))}{\log(x)}$.

Ejercicio 20. Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos(x)+2\,\text{sen}(3x))^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))\,\text{sen}(4x)}{x^3\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\text{sen}(x)}{x-\cos(x)}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Ejercicio 21. Estudia el comportamiento de la función $f\colon A\to\mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]2,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$, $\alpha = 2$.

b) $A = \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)} - \dfrac{1}{x-1}$, $\alpha = 1$.

c) $A =]1,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x^x-x}{1-x-\log(x)}$, $\alpha = 1$.

Ejercicio 22. Estudia el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f,g\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ dadas por

a) $f(x) = \dfrac{\log(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}$,

b) $g(x) = (a^x+x)^{1/x}$, donde $a\in\mathbb{R}^+$.

Ejercicio 23. Estudia el comportamiento en el punto cero de la función $f\colon A\to\mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$,

b) $A =]0,\frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (\text{sen}(x)+\cos(x))^{1/x}$

c) $A =]0,\frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \left(\cos(x)+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

E **Ejercicio 24.** Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3\sin(x)-3x\cos(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4 Optimización

Ejercicio 25. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones indicando los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

a) $y = 6-2x-x^2$

b) $y = 3x^4-4x^3$

c) $y = (x-1)^3$

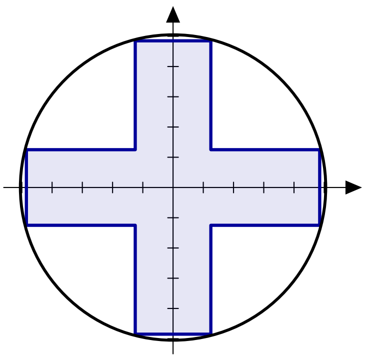
Ejercicio 26. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Ejercicio 27. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.

E **Ejercicio 28.** Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

E **Ejercicio 29.** ¿Cuál es la longitud mínima del segmento que tiene un extremo en el eje x, otro extremo en el eje y, y pasa por el punto $(8, 1)$?

Ejercicio 30. Demuestra que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos 2.

E 

Ejercicio 31. Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

Ejercicio 32. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Halla las dimensiones del rectángulo para que

a) el área sea máxima,

b) el perímetro sea máximo.

E **Ejercicio 33.** Calcula el punto (a, b) de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.

E **Ejercicio 34.** A un espejo rectangular de medidas 80x90 cm. se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados 10x12cm. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener del la pieza restante.

5 Polinomio de Taylor

Ejercicio 35. Expresar el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x - 2)$.

Ejercicio 36. Calcular un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:

a) $\alpha = \sqrt{e}$,

b) $\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 37. Utilizar el polinomio de Taylor para calcular $\sqrt{102}$ con un error menor que 10^{-2}.

E **Ejercicio 38.** Calcula una aproximación de $\cosh(1/2)$ con un error menor que 10^{-4}.

E **Ejercicio 39.** Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x) = xf(x)$.