CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE UN VECTOR ALEATORIO CONTINUO

Calcular la función de distribución del vector aleatorio (X, Y) con función de densidad:

$$f(x, y) = 2, \quad x > 0,\ 0 < y < 1 - x$$

Solución: La función de distribución del vector aleatorio (X, Y) se define como

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$$

es decir, como la $P[(X, Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y]]$, y por tanto

$$F(x, y) = \int_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f(t, s)dt\, ds = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t, s)ds\, dt = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(t, s)dt\, ds$$

Desde el punto de vista operativo, para el cálculo del valor de la función de distribución para cada valor fijo de (x, y), vamos a usar la siguiente notación

$$F(x_0, y_0) = P[(X, Y) \in (-\infty, x_0] \times (-\infty, y_0]] =$$

$$= \int_{(-\infty,x_0]\times(-\infty,y_0]} f(x, y)dx\, dy = \int_{-\infty}^{x_0}\int_{-\infty}^{y_0} f(x, y)dy\, dx = \int_{-\infty}^{y_0}\int_{-\infty}^{x_0} f(x, y)dx\, dy$$

Para ello vamos a representar gráficamente el recinto de valores del vector aleatorio (X, Y)

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0,\ 0 < y < 1 - x\}$$

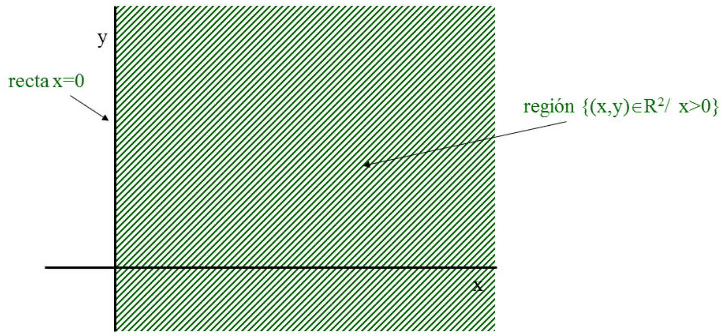
y a ver las posibles intersecciones (en función de los valores de x_0 e y_0) con el recinto del cual queremos calcular la probabilidad

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq x_0,\ y \leq y_0\}$$

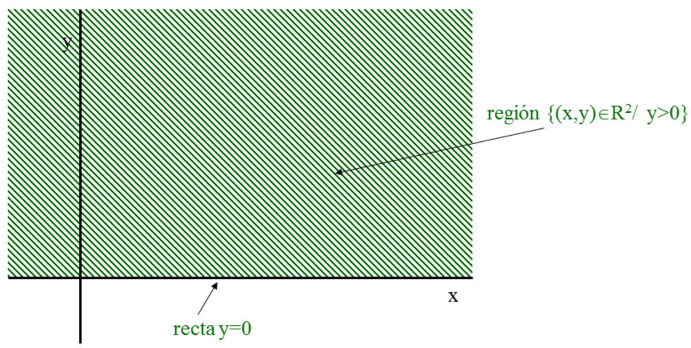
Para representar el recinto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0,\ 0 < y < 1 - x\}$$

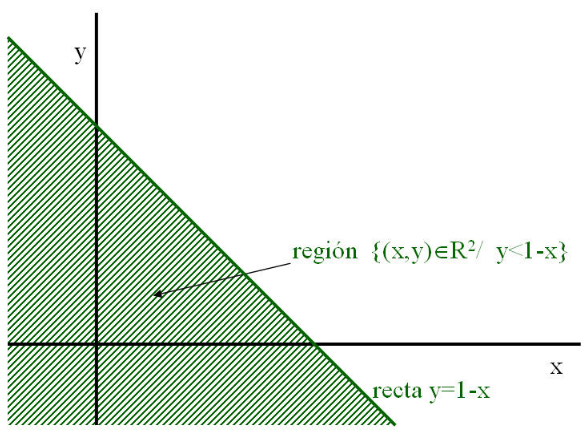
consideramos la intersección de los recintos determinados por cada una de las restricciones que lo determinan.
La región de $\mathbb{R}^2$ definida por la restricción $x > 0$, se obtiene considerando la recta $x = 0$ que divide a $\mathbb{R}^2$ en dos recintos y determinando (imponiendo la restricción $x > 0$) cuál es la región que la verifica. En este caso



La región de $\mathbb{R}^2$ definida por la restricción $y > 0$, se obtiene considerando la recta $y = 0$ que divide a $\mathbb{R}^2$ en dos recintos y determinando (imponiendo la restricción $y > 0$) cuál es la región que la verifica. En este caso



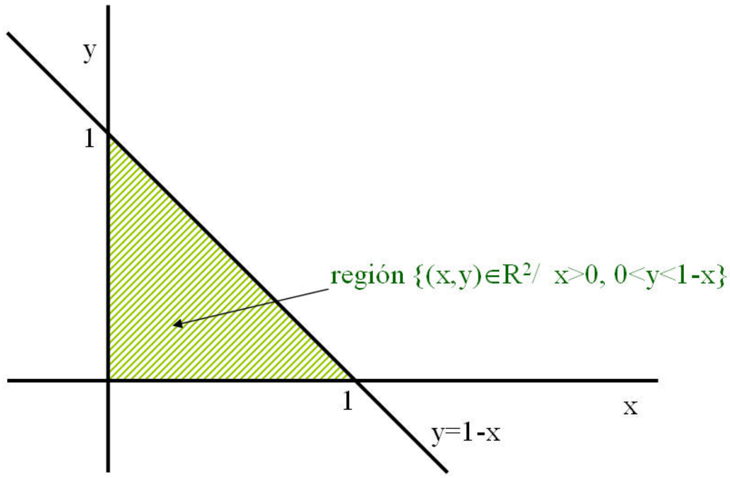
La región de $\mathbb{R}^2$ definida por la restricción $y < 1-x$, se obtiene considerando la recta $y = 1-x$ que divide a $\mathbb{R}^2$ en dos recintos y determinando (imponiendo la restricción $y < 1-x$) cuál es la región que la verifica. En este caso



Así, el recinto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0, \ 0 < y < 1-x\}$$

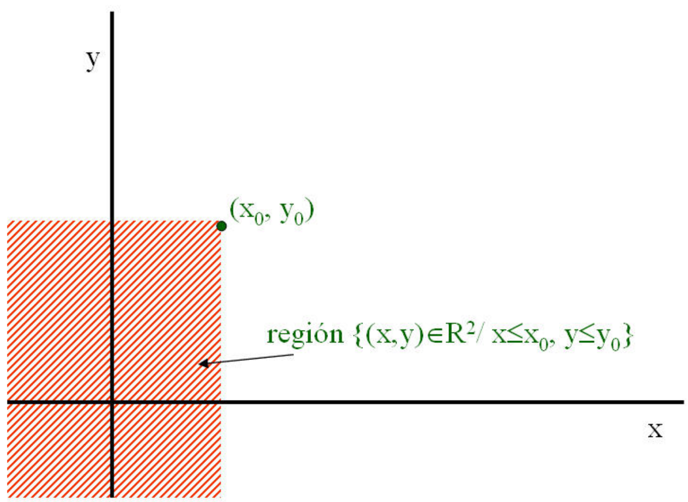
es el triángulo marcado en la siguiente gráfica



Por otra parte, el recinto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq x_0, \ y \leq y_0\}$$

es el siguiente

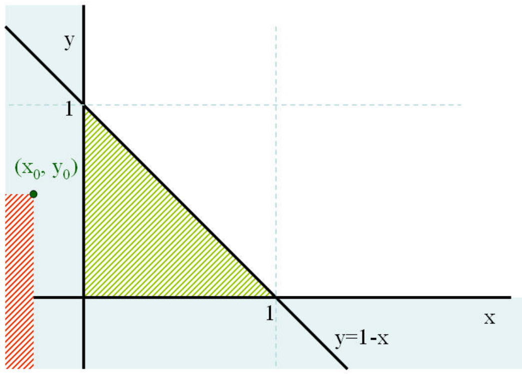


En las siguientes gráficas se muestran los diferentes recintos intersección de

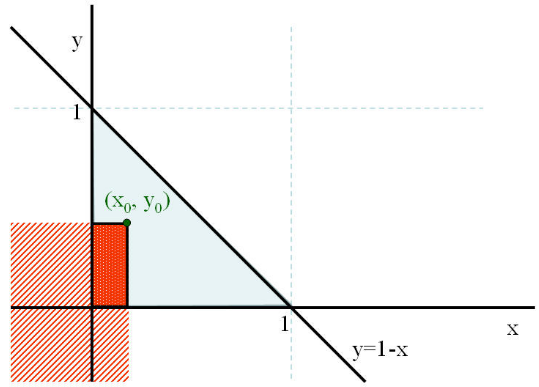
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0, \ 0 < y < 1 - x\} \ \text{ y } \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq x_0, \ y \leq y_0\}$$

para distintas zonas de $\mathbb{R}^2$.

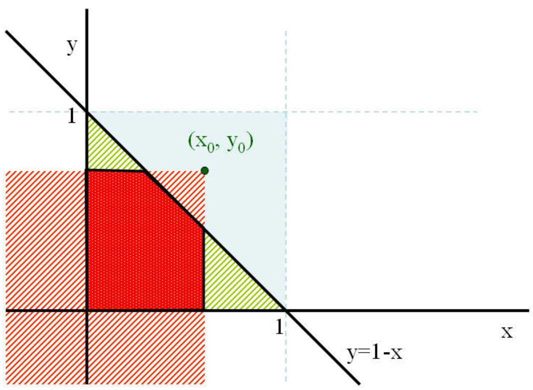
ZONA 1



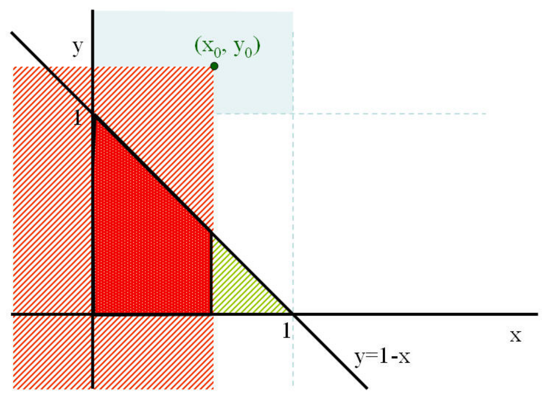
ZONA 2



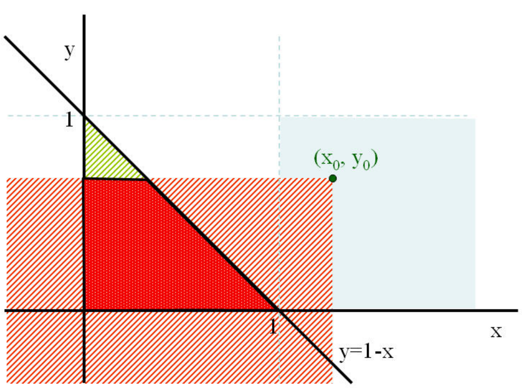
ZONA 3



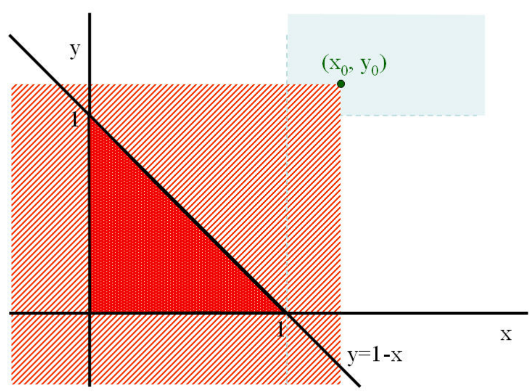
ZONA 4



ZONA 5

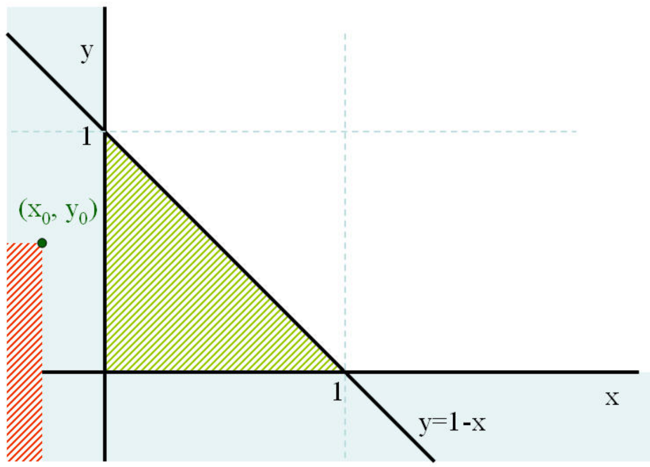


ZONA 6



Estudiemos cada una de las zonas:

ZONA 1

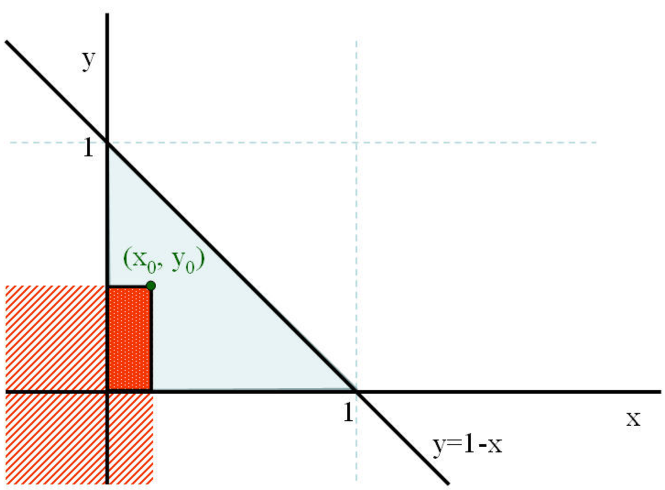


Esta zona (marcada en azul claro) está definida como $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x < 0 \text{ ó } y < 0\}$ y el valor de la función de distribución es

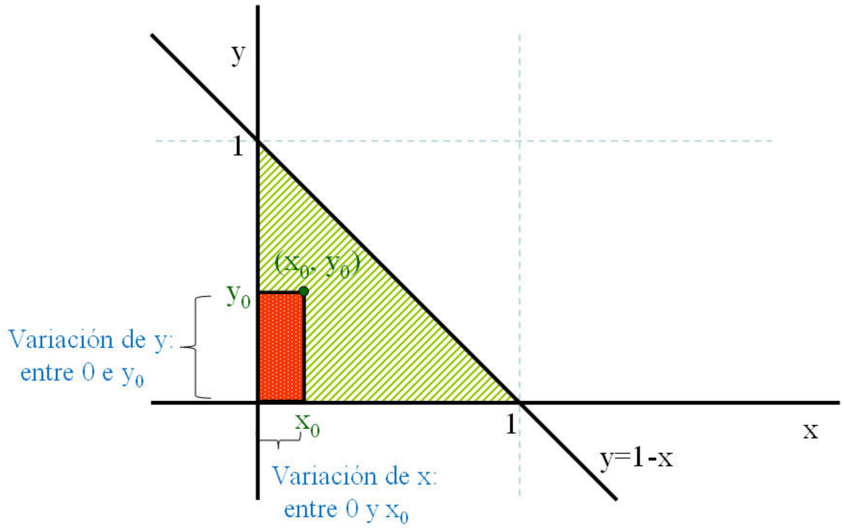
$$\int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} 0 \, dy \, dx = 0$$

dado que en $(-\infty, x_0] \times (-\infty, y_0]$ la función de densidad vale cero.

ZONA 2



Esta zona está definida como $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0, x + y < 1\}$ (considerando que el punto está contenido en el triángulo sombreado de azul claro e imponiendo las condiciones asociadas a las rectas que lo determinan). Para calcular el valor de la función de distribución en esta zona debemos integrar la expresión de la función de densidad (2, en este caso) en la intersección marcada en rojo. Dicha intersección es un recinto regular en ambas direcciones y, por tanto, como se muestra en la siguiente figura

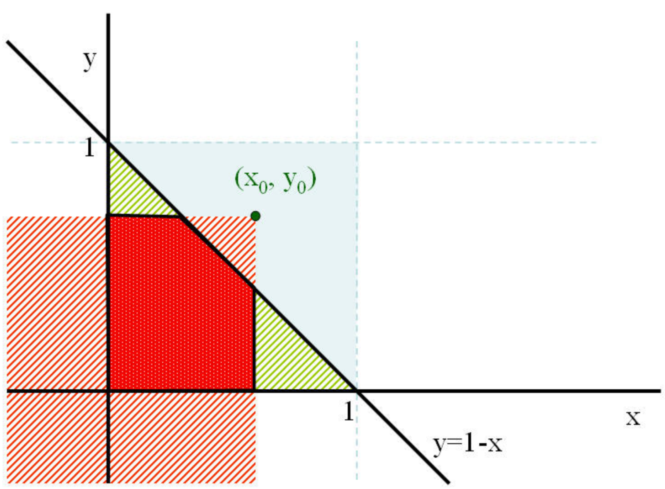


$$F(x_0, y_0) = \int_0^{x_0}\int_0^{y_0} 2\,dy\,dx = \int_0^{x_0} (2y)|_0^{y_0}\ dx = \int_0^{x_0} 2y_0\,dx = 2y_0\ (x)|_0^{x_0} = 2x_0y_0,$$

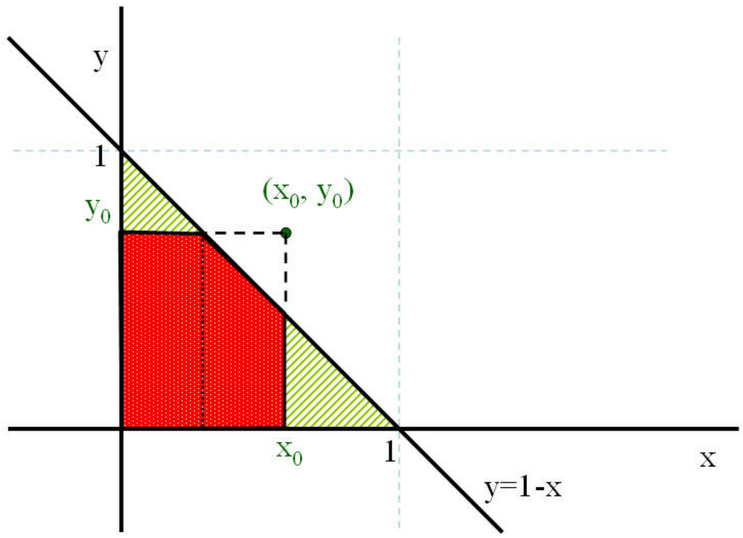
o bien,

$$F(x_0, y_0) = \int_0^{y_0}\int_0^{x_0} 2\,dx\,dy = \int_0^{y_0} (2x)|_0^{x_0}\ dy = \int_0^{y_0} 2x_0\,dy = 2x_0\ (y)|_0^{y_0} = 2x_0y_0.$$

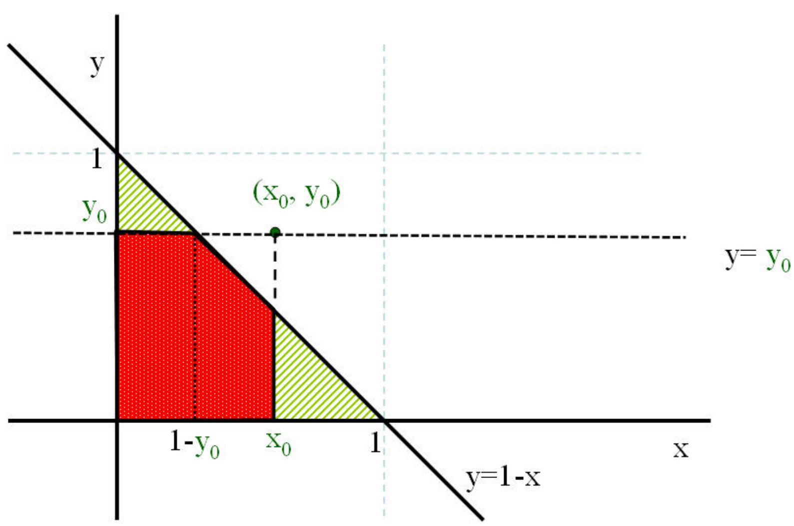
<u>ZONA 3</u>



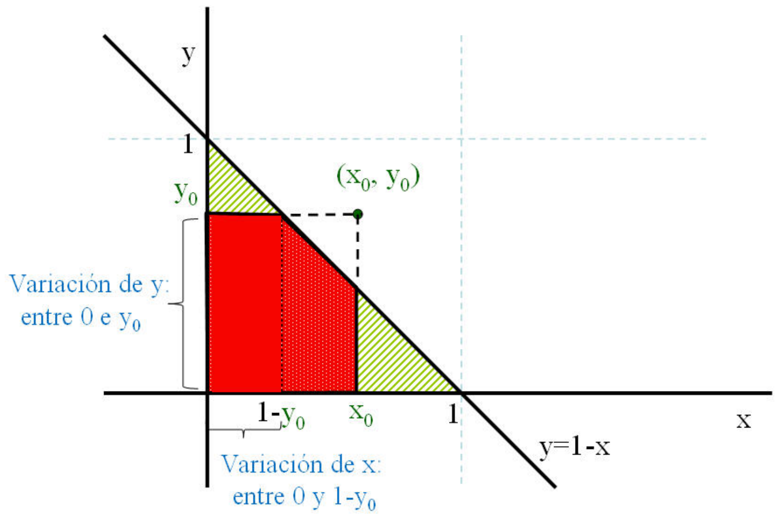
Esta zona está definida como $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x < 1,\ y < 1,\ x + y \geq 1\}$ (considerando que el punto está contenido en el triángulo sombreado de azul claro e imponiendo las condiciones asociadas a las rectas que lo determinan). Para calcular el valor de la función de distribución en esta zona debemos integrar la expresión de la función de densidad (2, en este caso) en la intersección marcada en rojo. Dicha intersección no es un recinto regular en ninguna dirección y, por tanto, debemos descomponerlo en regiones que sí lo sean; por ejemplo en el sentido del eje y, la descomposición es la que se muestra en la siguiente figura:



En primer lugar, debemos determinar el valor del eje x que determina la recta que divide a ese recinto en dos regulares en la dirección de y. Como se muestra en la siguiente figura, dicho punto es la coordenada del eje x del punto intersección de las rectas $y = y_0$ e $y = 1 - x$ que es $1 - y_0$.



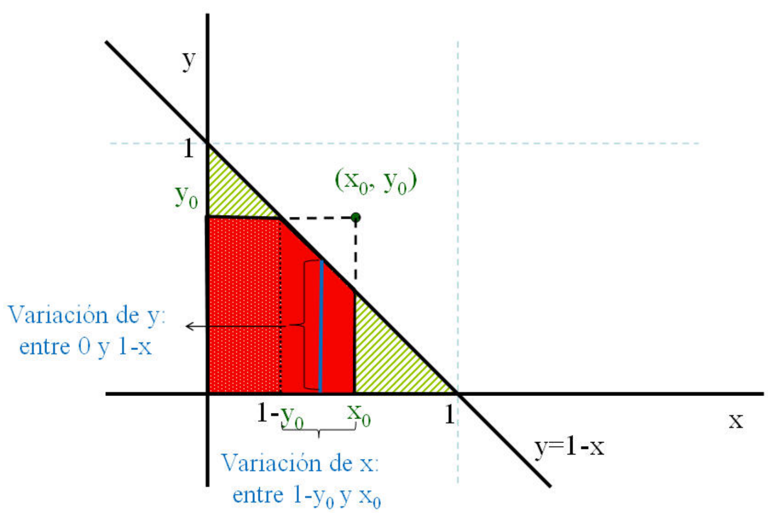
La integral en el primer trozo, a partir de la siguiente figura



es

$$\int_0^{1-y_0} \int_0^{y_0} 2\,dy\,dx = \int_0^{1-y_0} (2y)|_0^{y_0}\ dx = \int_0^{1-y_0} 2y_0\,dx = 2y_0\ (x)|_0^{1-y_0} = 2y_0(1-y_0).$$

y, en el segundo trozo, a partir de la siguiente figura



es

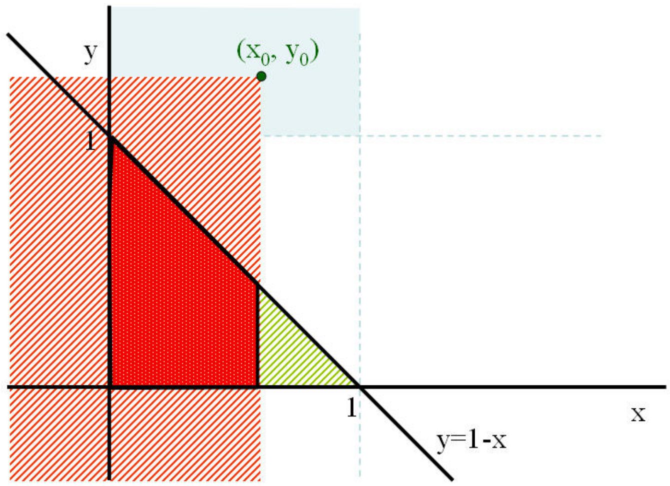
$$\int_{1-y_0}^{x_0} \int_0^{1-x} 2\,dy\,dx = \int_{1-y_0}^{x_0} (2y)|_0^{1-x}\ dx =$$

$$= \int_{1-y_0}^{x_0} 2(1-x)\,dx = \left(2x - x^2\right)\Big|_{1-y_0}^{x_0} = 2x_0 - x_0^2 - 2(1-y_0) + (1-y_0)^2.$$

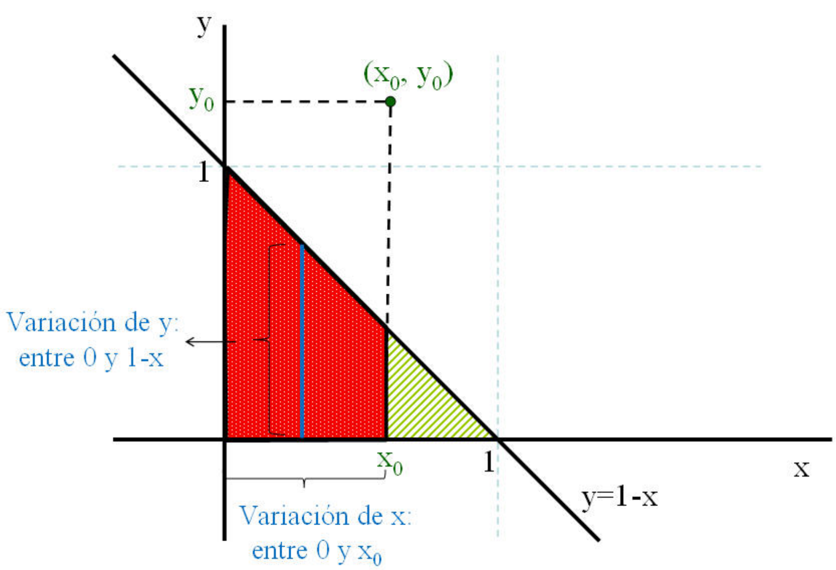
Por tanto, el valor de la función de distribución en esta zona es

$$F(x_0, y_0) = 2y_0(1-y_0) + 2x_0 - x_0^2 - 2(1-y_0) + (1-y_0)^2 = 2(x_0+y_0) - x_0^2 - y_0^2 - 1.$$

<u>ZONA 4</u>



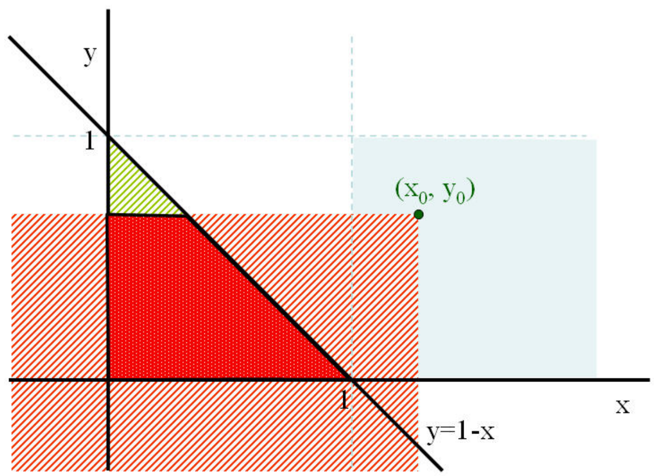
Esta zona está definida como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x < 1, \ y \geq 1\}$. Para calcular el valor de la función de distribución en esta zona debemos integrar la expresión de la función de densidad (2, en este caso) en la intersección marcada en rojo. Dicha intersección es un recinto regular en la dirección y y, por tanto, como se muestra en la siguiente figura



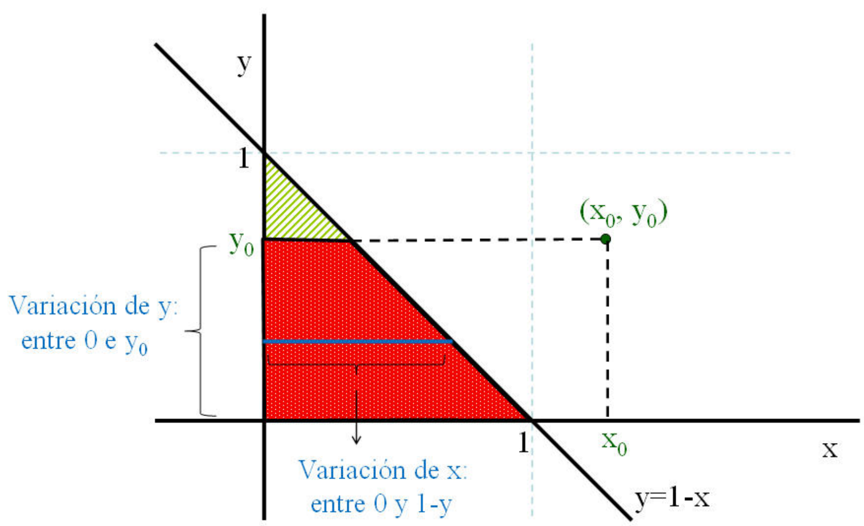
$$F(x_0, y_0) = \int_0^{x_0} \int_0^{1-x} 2\, dy\, dx = \int_0^{x_0} (2y)\big|_0^{1-x}\, dx =$$

$$\int_0^{x_0} 2(1-x)\, dx = \left(2x - x^2\right)\big|_0^{x_0} = 2x_0 - x_0^2.$$

ZONA 5



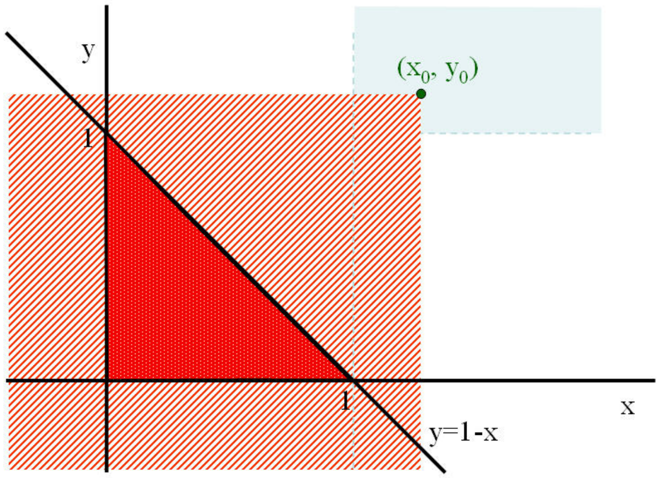
Esta zona está definida como $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 1, \ 0 \leq y < 1\}$. Para calcular el valor de la función de distribución en esta zona debemos integrar la expresión de la función de densidad (2, en este caso) en la intersección marcada en rojo. Dicha intersección es un recinto regular en la dirección x, por tanto, como se muestra en la siguiente figura



$$F(x_0, y_0) = \int_0^{y_0} \int_0^{1-y} 2\, dx\, dy = \int_0^{y_0} \left.(2x)\right|_0^{1-y} \, dy$$

$$= \int_0^{y_0} 2(1-y)\, dy = \left.\left(2y - y^2\right)\right|_0^{y_0} = 2y_0 - y_0^2.$$

ZONA 6



Esta zona está definida como $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 1,\ y \geq 1\}$. Para calcular el valor de la función de distribución en esta zona debemos integrar la expresión de la función de densidad (2, en este caso) en la intersección marcada en rojo. Dicha intersección es el recinto donde está definido el vector aleatorio y, por tanto (por las propiedades de la función de densidad)

$$F(x_0, y_0) = 1.$$

Resumiendo, la función de distribución del vector aleatorio, expresada ya como función de x e y es

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ó } y < 0 \\ 2xy & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y < 1 \\ 2(x+y) - x^2 - y^2 - 1 & x < 1,\ y < 1,\ x+y \geq 1 \\ 2x - x^2 & 0 \leq x < 1,\ y \geq 1 \\ 2y - y^2 & x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & x \geq 1,\ y \geq 1 \end{cases}$$