CÁLCULO DE VECTOR DE MEDIAS, MATRIZ DE COVARIANZAS Y FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS PARA UN VECTOR ALEATORIO BIDIMENSIONAL DISCRETO

Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional discreto. El vector de medias $(E[X], E[Y])$ se puede calcular usando las funciones masa de probabilidad marginales o la función masa de probabilidad conjunta:

$$E[X] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x x\, P[X = x] \\ \\ \displaystyle\sum_{x,y} x\, P[X = x, Y = y] \end{cases}$$

$$E[Y] = \begin{cases} \displaystyle\sum_y y\, P[Y = y] \\ \\ \displaystyle\sum_{x,y} y\, P[X = x, Y = y] \end{cases}$$

La matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

se obtiene usando las siguientes expresiones

$$\begin{array}{l} Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \\ Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 \\ Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \end{array}$$

El cálculo de $E[X^2]$ y $E[Y^2]$ se puede hacer usando las funciones masa de probabilidad marginales o la función masa de probabilidad conjunta:

$$E[X^2] = \begin{cases} \displaystyle\sum_x x^2\, P[X = x] \\ \\ \displaystyle\sum_{x,y} x^2\, P[X = x, Y = y] \end{cases}$$

$$E[Y^2] = \begin{cases} \displaystyle\sum_y y^2\, P[Y = y] \\ \\ \displaystyle\sum_{x,y} y^2\, P[X = x, Y = y] \end{cases}$$

Sin embargo, para el cálculo de la $E[XY]$ es necesario el uso de la función masa de probabilidad conjunta

$$E[XY] = \sum_{x,y} xy\, P[X = x, Y = y]$$

La esperanza de una función unidimensional del vector aleatorio, $h(X,Y)$, se obtiene mediante la expresión

$$E[h(X,Y)] = \sum_{x,y} h(x,y)\, P[X = x, Y = y]$$

En particular, la función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t,s) = E[\mathrm{e}^{tX+sY}] = \sum_{x,y} \mathrm{e}^{tx+sy}\, P[X = x, Y = y]$$

CÁLCULO DE VECTOR DE MEDIAS, MATRIZ DE COVARIANZAS Y FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS PARA UN VECTOR ALEATORIO BIDIMENSIONAL CONTINUO

Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional continuo. El vector de medias $(E[X], E[Y])$ se puede calcular usando las funciones de densidad marginales o la función de densidad conjunta:

$$E[X] = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\, dx \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} x\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

$$E[Y] = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} y\, f_Y(y)\, dy \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

La matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

se obtiene usando las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ Var(Y) &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \\ Cov(X,Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

El cálculo de $E[X^2]$ y $E[Y^2]$ se puede hacer usando las funciones de densidad marginales o la función de densidad conjunta:

$$E[X^2] = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2\, f_X(x)\, dx \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} x^2\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

$$E[Y^2] = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} y^2\, f_Y(y)\, dy \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} y^2\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

Sin embargo, para el cálculo de la $E[XY]$ es necesario el uso de la función de densidad conjunta

$$E[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

La esperanza de una función unidimensional del vector aleatorio, $h(X, Y)$, se obtiene mediante la expresión

$$E[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

En particular, la función generatriz de momentos

$$M_{(X,Y)}(t,s) = E[\mathrm{e}^{tX+sY}] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{tx+sy}\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$