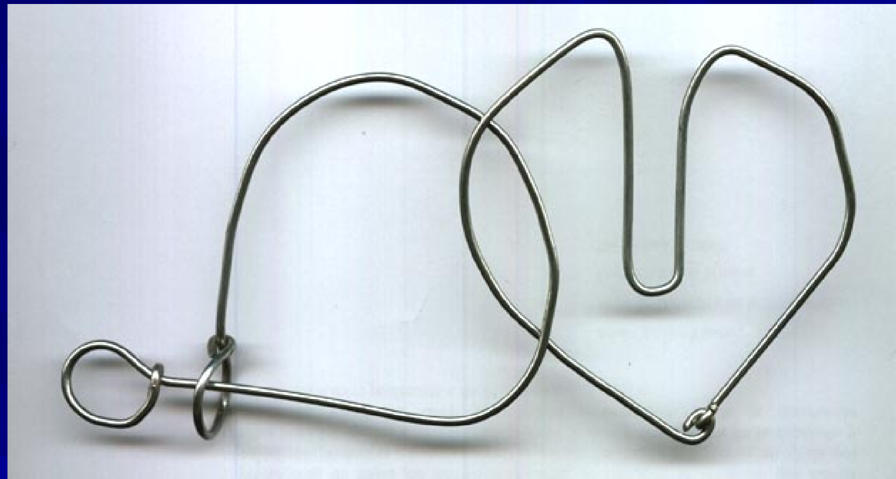
DE LOS PUZZLES DE ALAMBRE A LAS MATEMÁTICAS

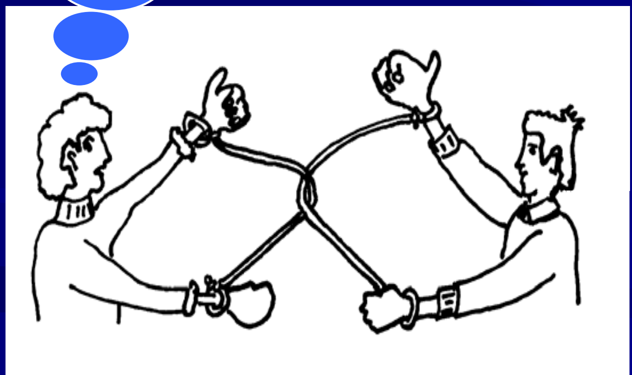
Pablo Flores

pflores@ugr.es

http://www.ugr.es/local/pflores



Historia topológica



Laberintín (Principios s. XX)

Cuestiones

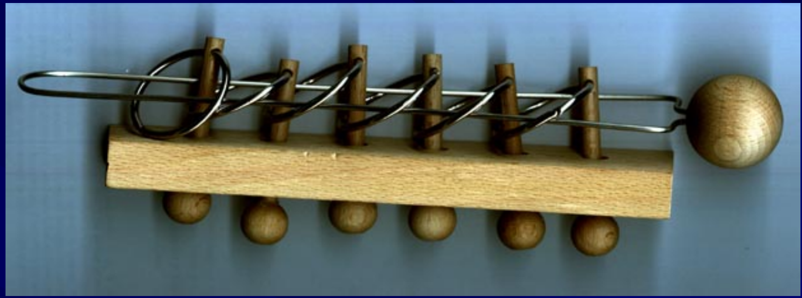
- ¿Por qué se les llama Puzzles ***topológicos***?
- ¿Qué relación tienen los Puzzles de alambre con la MATEMÁTICA?
- ¿Qué aportan

- la Topología a los Puzzles

- los PUZZLES a la TOPOLOGÍA?

Cuestiones

- ¿Se aprende MATEMÁTICAS con los Puzzles de alambre?
- ¿Se aprende topología jugando con los puzzles topológicos?
- ¿O sólo…a resolver puzzles topológicos?



Cuestiones

- ¿Ayudan en Educación Matemática?

A) Profundizar en la relación que tienen con la Topología

- Dos pasos:
  - A) Aclarar la relación entre puzzles de alambre y las Matemáticas,
  - B) Analizar su riqueza educativa

B) Descubrir sus cualidades educativas: Flores, 2002, 2003, Montoya y Flores 2003

Esquema de la conferencia

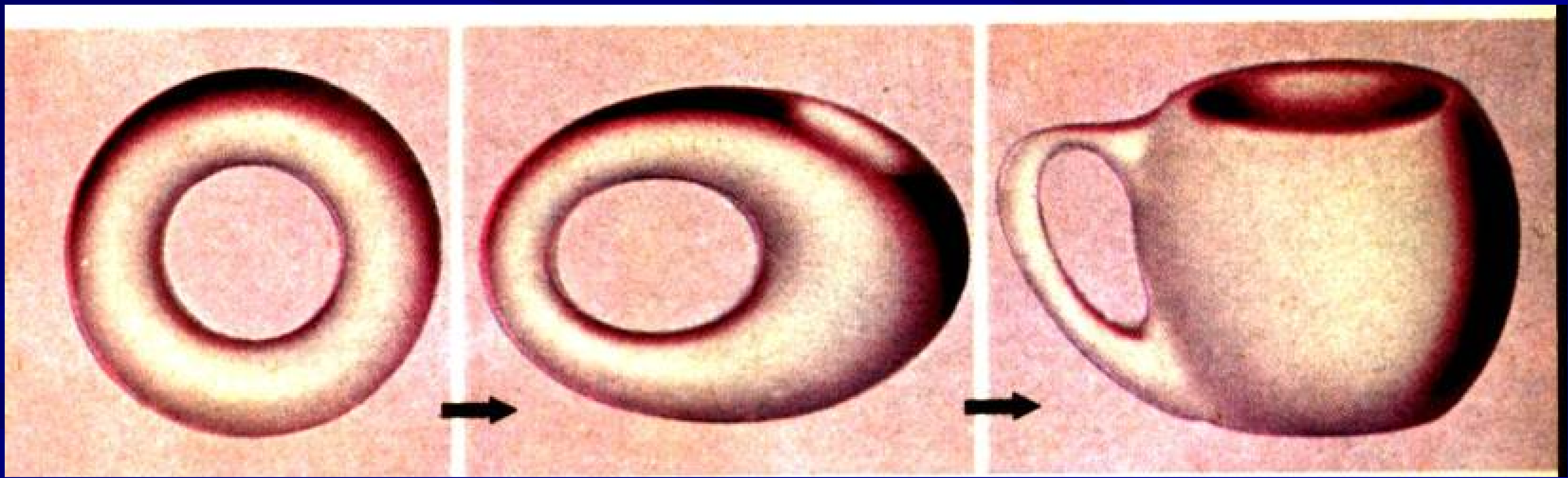
Fin: Mostrar que los Puzzles de Alambre se relacionan con las Matemáticas

1. La Topología
2. La Teoría de Nudos
3. Los puzzles de alambre
   - Problemas
   - Variables para clasificarlos
   - Identidad de los puzzles

Topología

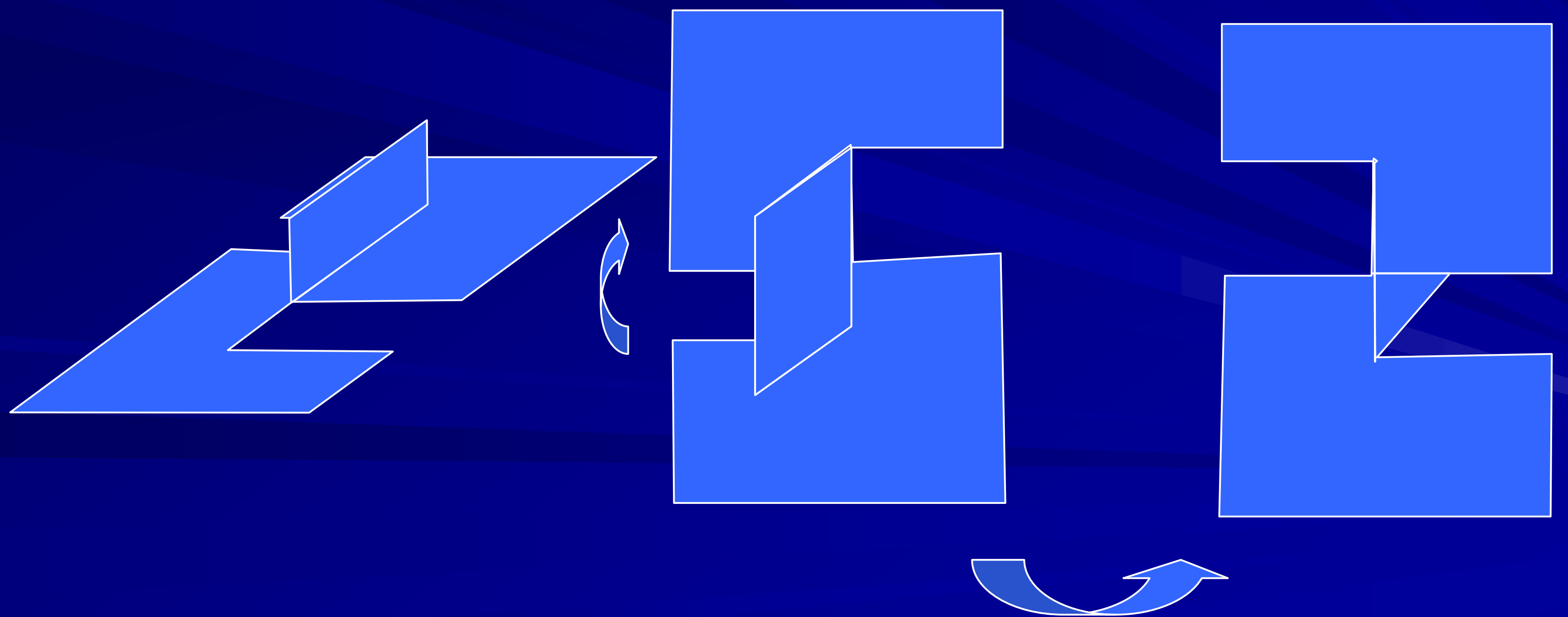
la TOPOLOGÍA estudia las propiedades de las figuras que no cambian cuando se deforman esas figuras.

Se dice que un topólogo confunde un Donuts con una Taza:



TOPOLOGÍA

La Topología se ocupa de estudiar si se puede hacer esta figura con UNA SOLA HOJA

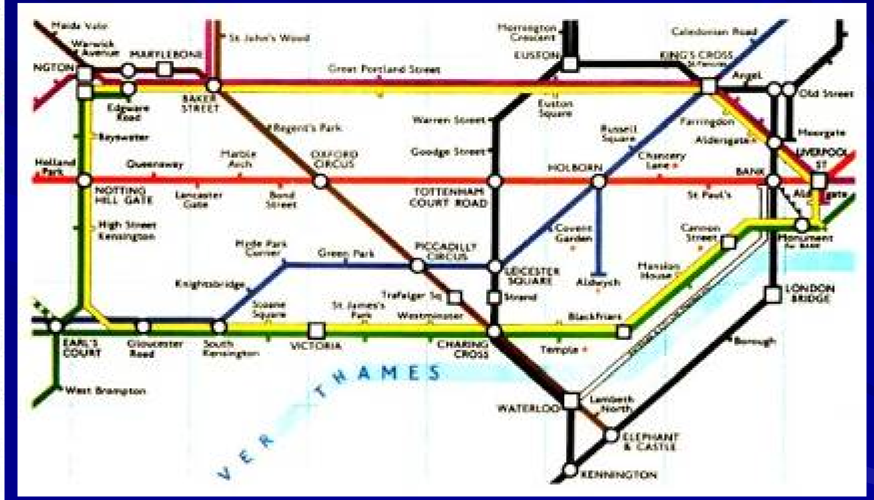


TOPOLOGÍA

- Estudio abstracto del *Punto* Límite (Hocking y Young, 1966)
- Se ocupa de las propiedades que permanecen inalterables ante transformaciones topológicas (Courant y Robbins, 1969), transformaciones elásticas (Stewart, 1998), transformaciones continuas (Stewart, 1977)

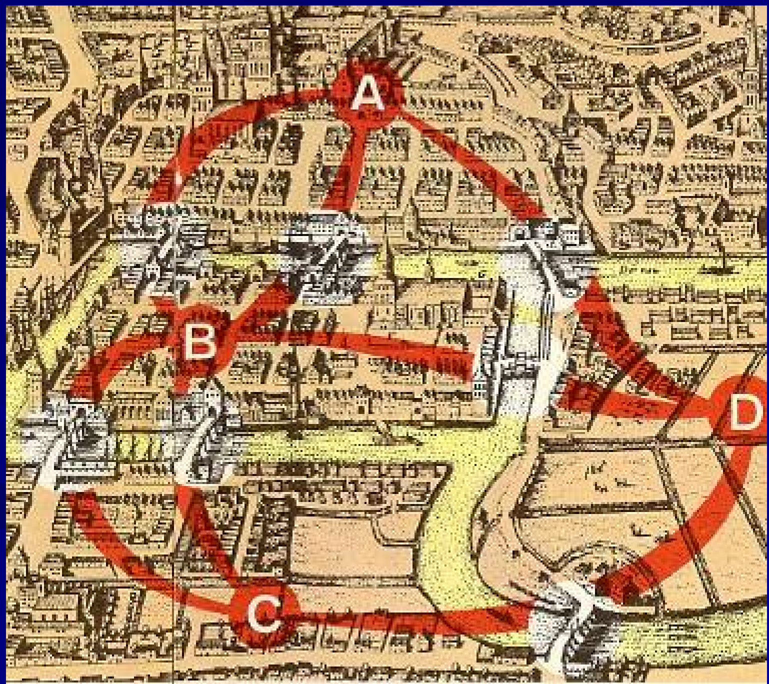
TOPOLOGÍA

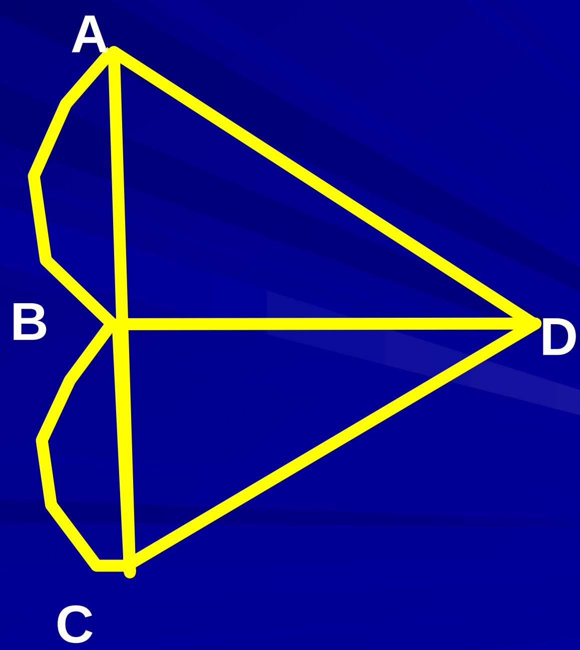
La TOPOLOGÍA permite obtener planos del Metro o de autobuses, más fáciles de comprender. Para ello deforman los mapas reales



TOPOLOGÍA

La TOPOLOGÍA nace con un problema de Euler: Los puentes de Konigsberg: ¿Se puede ir de un lado a otro de la ciudad, pasando por todos los puentes una sola vez?



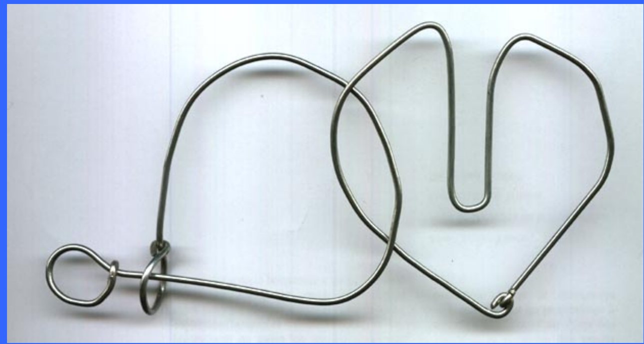


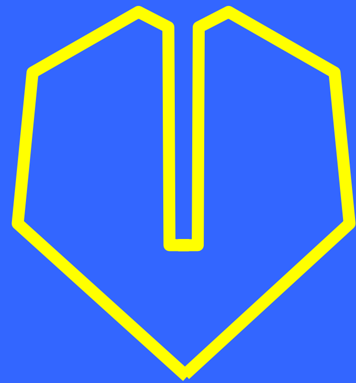
TOPOLOGÍA

- Se ocupa de todo lo que se puede transformar cuando no se conservan las relaciones métricas ni la forma visible (Hogben, 1966):
  - *Número de partes,* regiones conexas (Dos puntos cualquiera se pueden unir por curvas contenidas en la región)
  - *Número de bordes - agujeros*

TOPOLOGÍA y PUZZLES

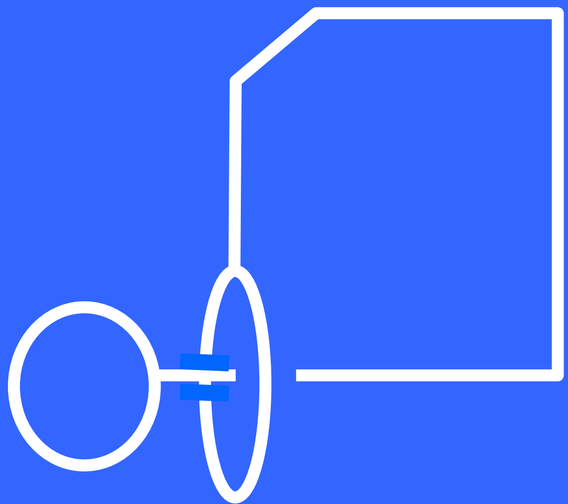
- Grado de conexión de los puzzles





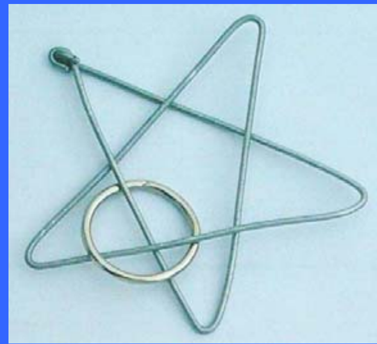
TORO

GAFAS



TOPOLOGÍA y PUZZLES

Cierre de las figuras que lo forman:



ABIERTA

CERRADAS

TOPOLOGÍA y PUZZLES

- Interesa estudiar si son **cerrados** o **abiertos**

Permite **distinguir puzzles** entre si:

- **Clavos**: Son **abiertos**

TOPOLOGÍA y PUZZLES

- Interesa estudiar si son **cerrados** o **abiertos**

Permite **distinguir puzzles** entre si:

- Escamoteables:

Pueden ser cerrados

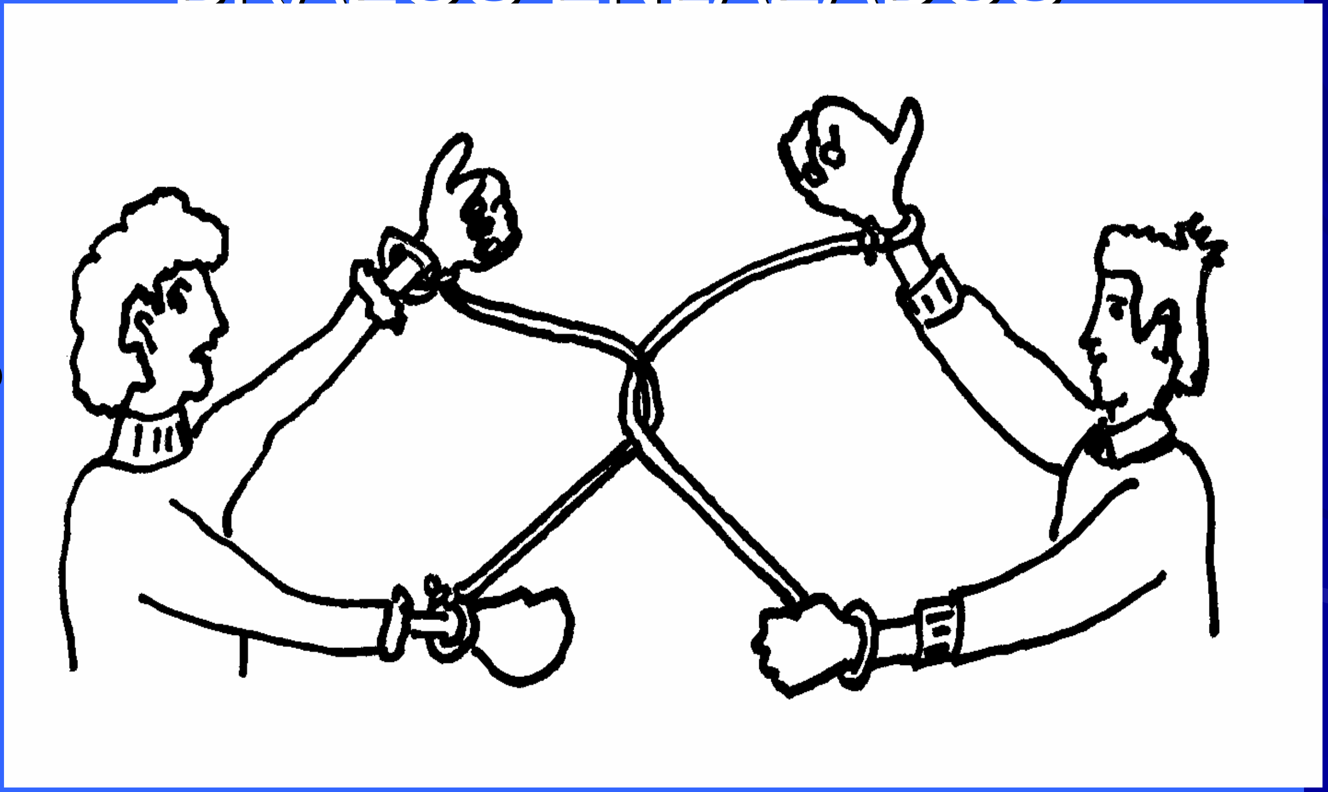
TOPOLOGÍA y PUZZLES

- Interesa estudiar si son **cerrados** o **abiertos**

BRAZOS ENLAZADOS

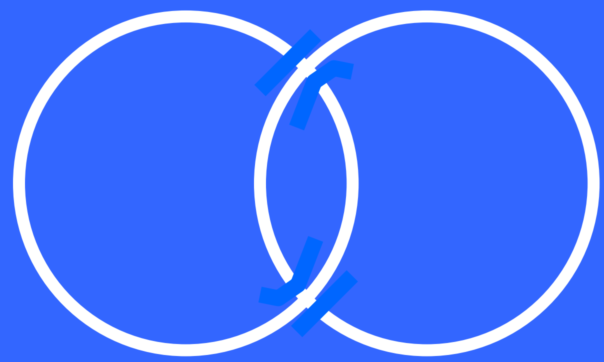
¿Abierto?

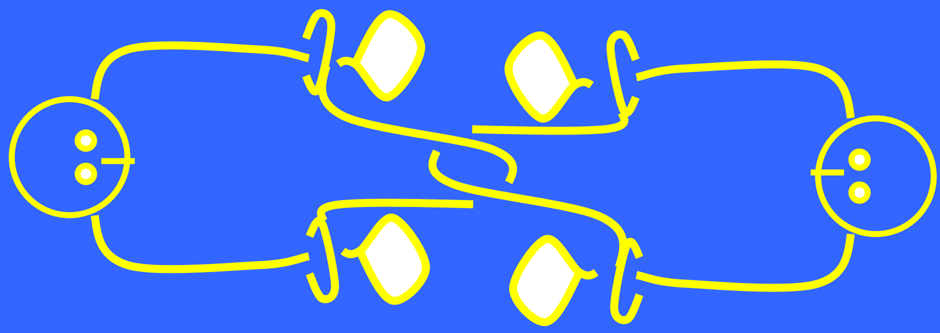
¿Cerrado?



TOPOLOGÍA y PUZZLES

- BRAZOS ENLAZADOS



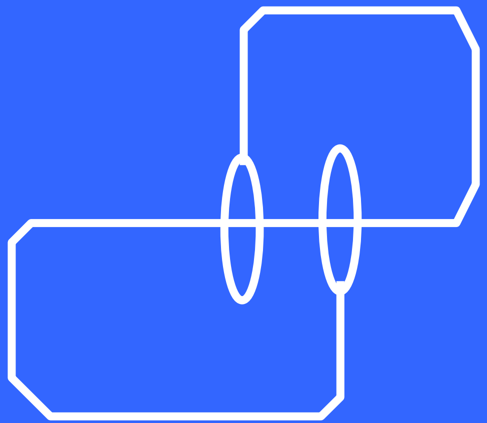


TOPOLOGÍA y PUZZLES

- Interesa estudiar si son **cerrados** o **abiertos**

Permite **clasificar** los puzzles:

Cerrado: Abierto:

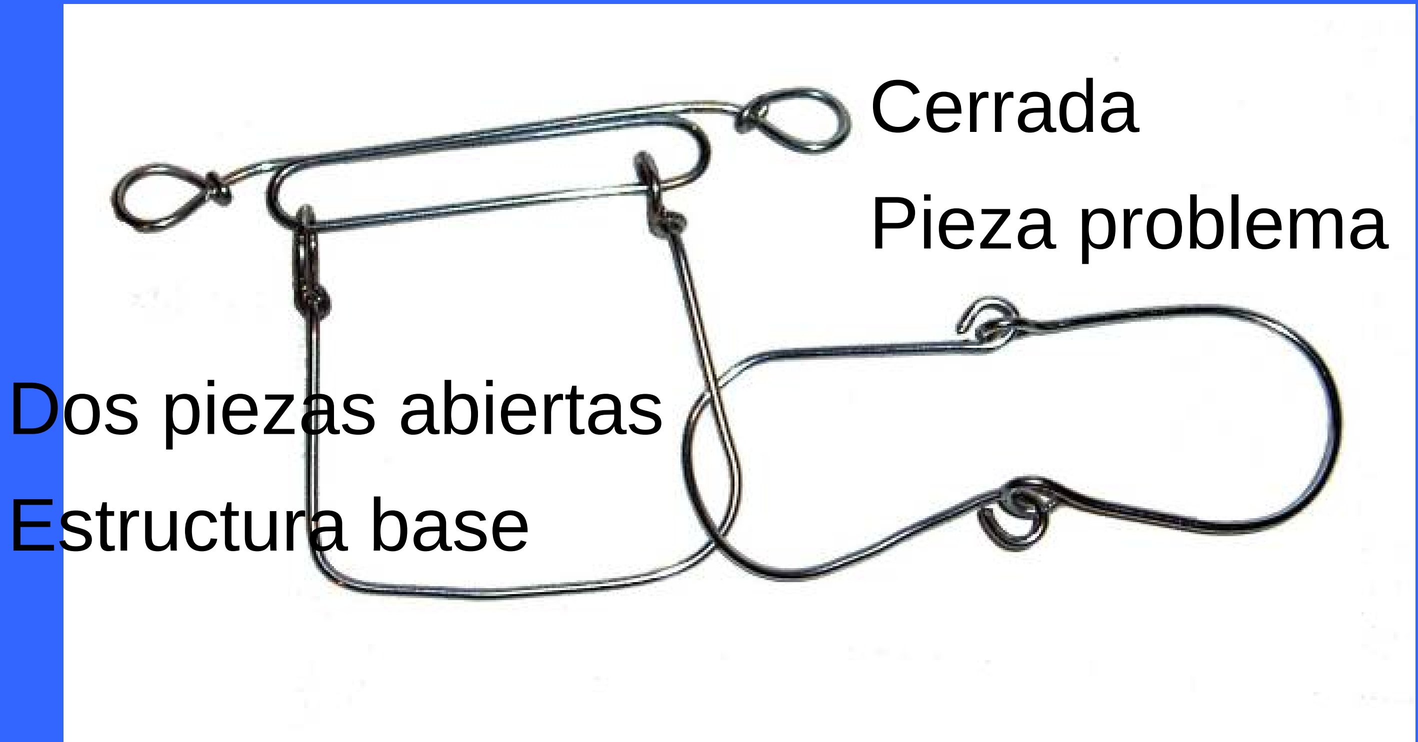


Los extremos abrazan al cuerpo del puzzle

Al menos un extremo está libre

TOPOLOGÍA y PUZZLES

- ¿Es abierto o cerrado?



TOPOLOGÍA y PUZZLES

- Interesa estudiar si son **cerrados** o **abiertos**

Permite **distinguir las partes** de algunos puzzles:

PIEZA PROBLEMA:

La que hay que separar

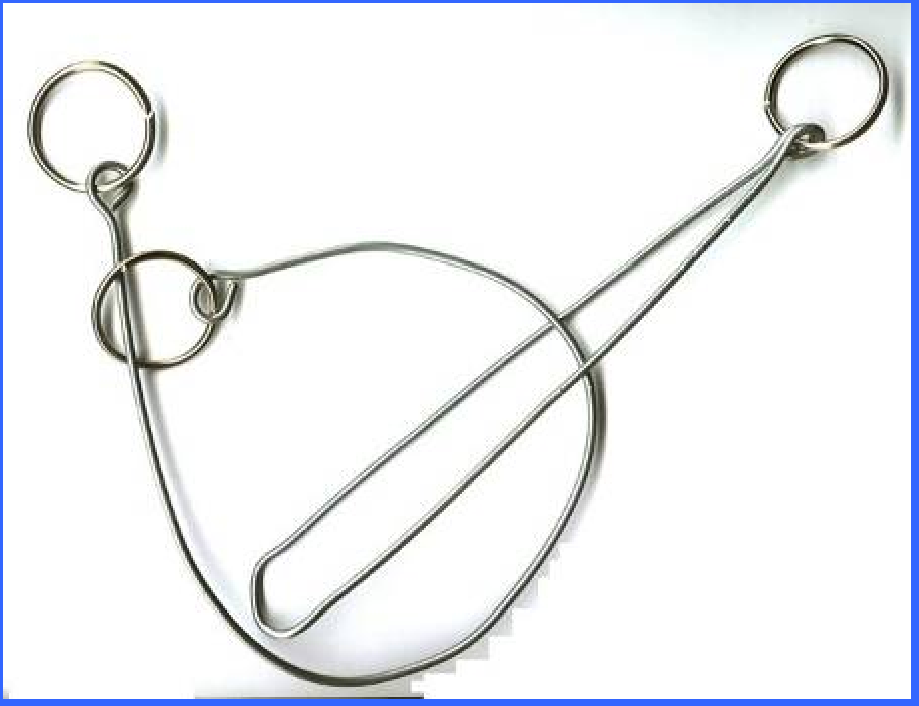
CERRADA

ESTRUCTURA BASE:

ABIERTA

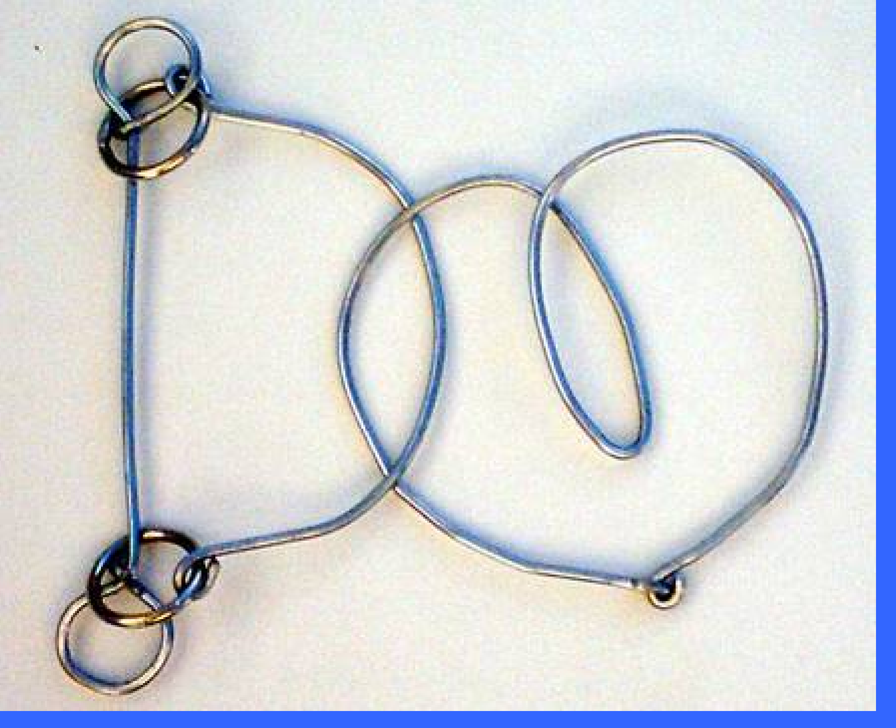
TOPOLOGÍA y PUZZLES

Identificar pieza PROBLEMA (Cerrada) y ESTRUCTURA BASE (Abierta)



TOPOLOGÍA y PUZZLES

Identificar pieza PROBLEMA (Cerrada) y ESTRUCTURA BASE (Abierta)



TOPOLOGÍA Y PUZZLES

- Las cualidades topológicas NO SON SUFICIENTES para diferenciar los puzzles topológicos

Hay puzzles abiertos:

- Equivalentes a cerrados,
- Sin solución
- etc.

- Busquemos otras cualidades

TOPOLOGÍA Y PUZZLES

- Otras cualidades,

- Enlazar

Abrazar: La anilla pequeña abraza a la cuerda

Anudar: La anilla grande está anudada a la cuerda (con nudo LLANO–trivial-)

Enlazar: La anilla mediana enlaza a la cuerda

- Anudar

TOPOLOGÍA Y PUZZLES

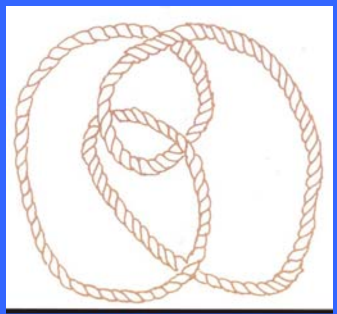
- Otras cualidades, como:

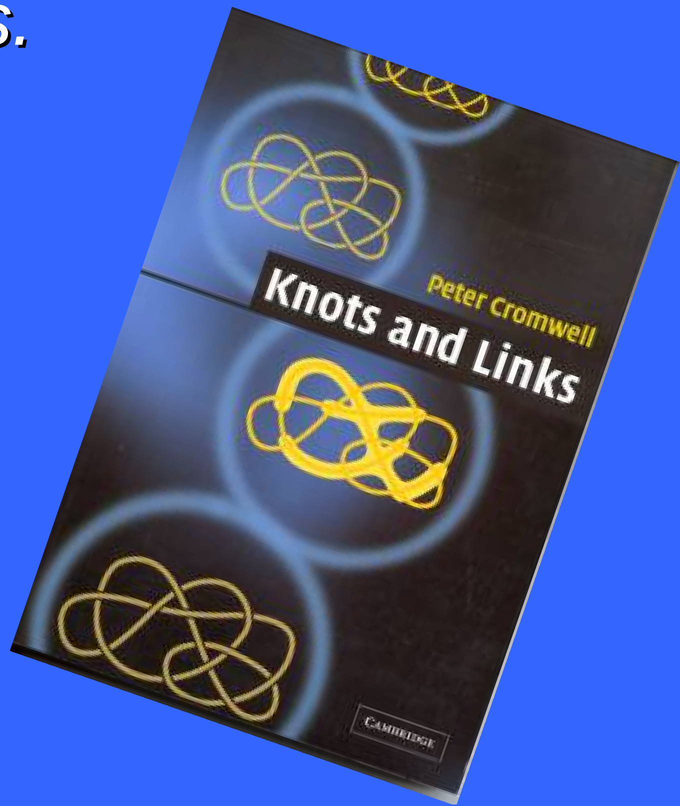
- Estar dentro de
- Estar fuera
- Estar unido
- Formar otra pieza
- Etc.

Estas cualidades se estudian en la TEORÍA DE NUDOS

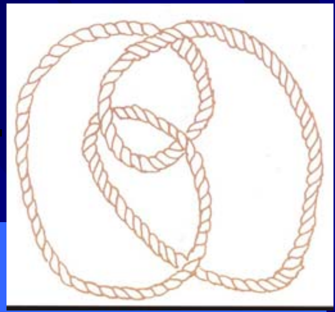
TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES

- Teoría de Nudos: *Parte de la Topología que estudia curvas cerradas unidimensionales, que no se intersecan a si mismas.*





TEORÍA DE NUDOS Y PUZZ



Estudia:

– Si los nudos están anudados (no se desatan al aplicarle transformaciones topológicas)

– Criterios de equivalencia de nudos

– Clasificar los nudos

- Para ello busca elementos invariantes a las transformaciones que caben hacer en un nudo (transformaciones elásticas, sin cortar ni unir)

TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES

En Matemáticas, un nudo es tridimensional, formado por curvas cerradas.

Nudo Trivial

Nudo Simple

Nudo Simple en forma de TRILÓBULO

TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES

- Para estudiar los nudos se representan por medio de diagramas.

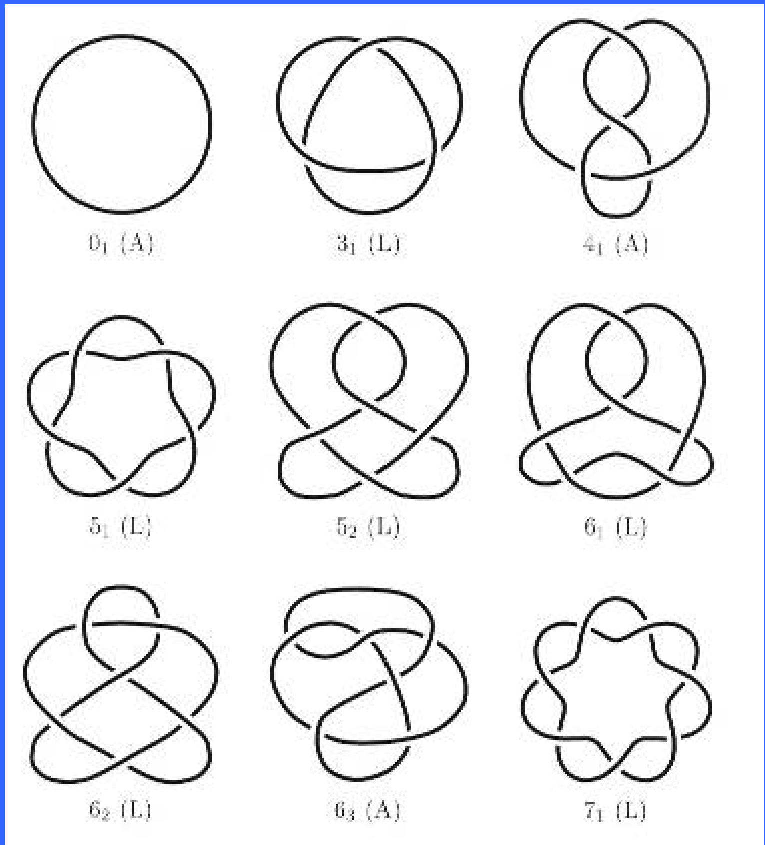
LÓBULO,
NUDO
IMPLE

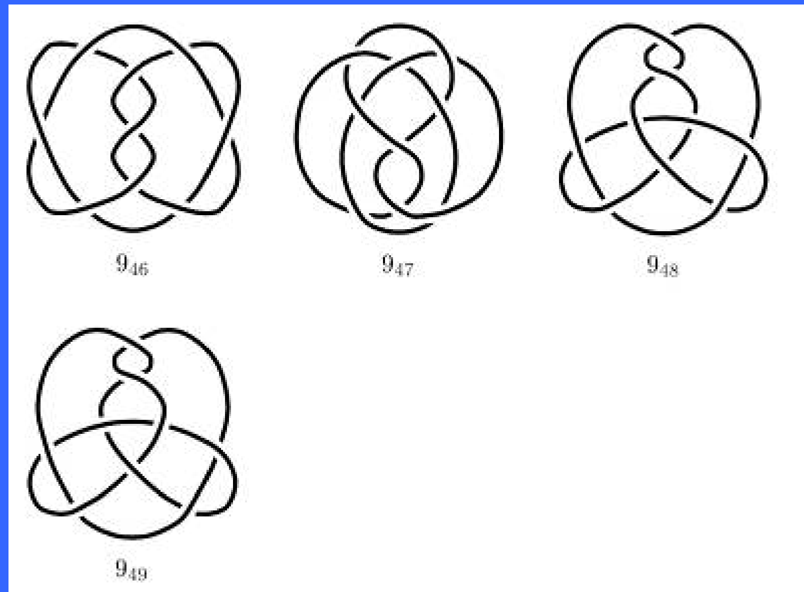
NUDOS EQUIVALENTES TRIVIALES

- Se han clasificado los nudos a partir de su forma más simple

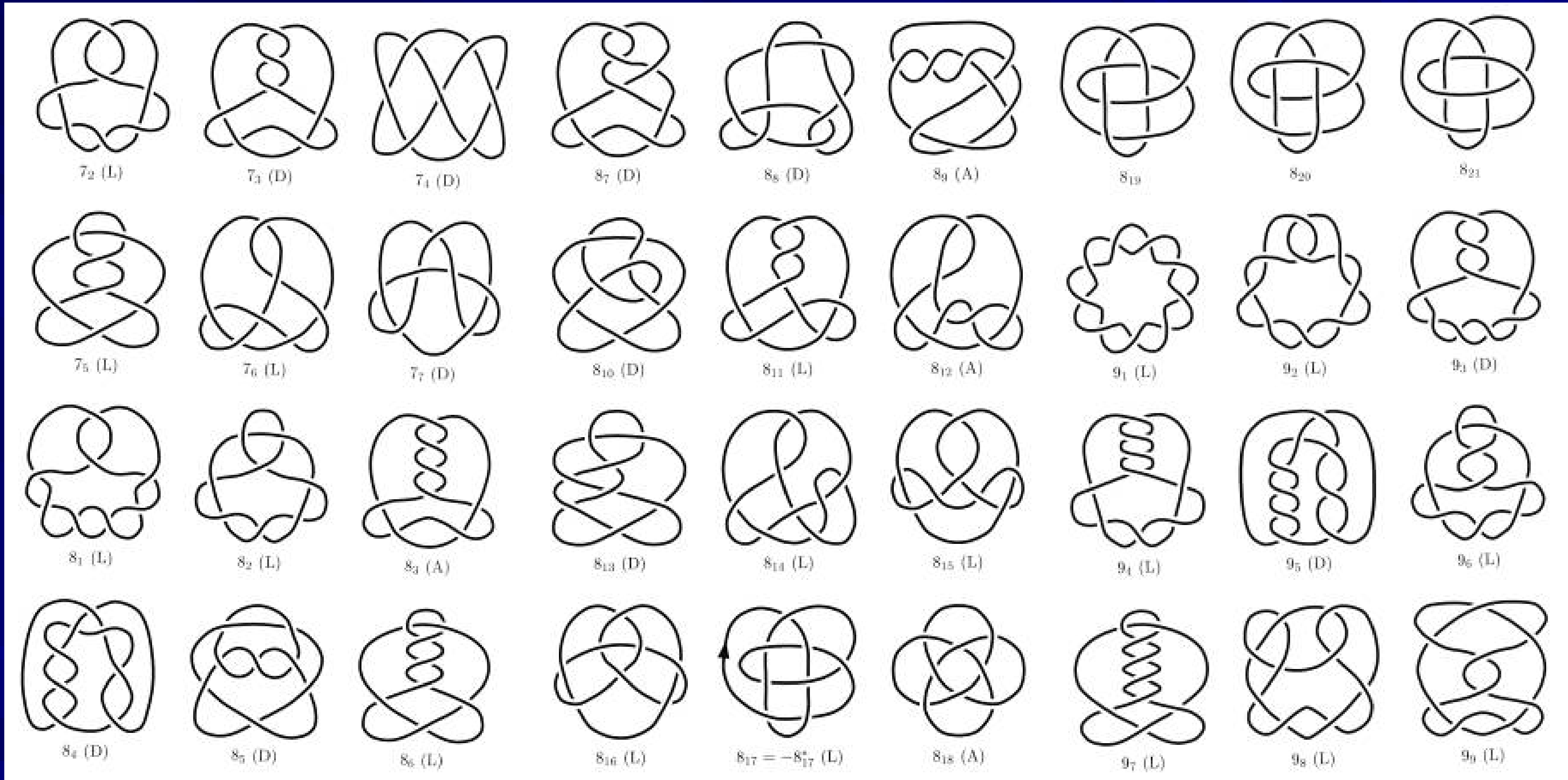
TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES

Clasificación
de nudos (1 y 7)

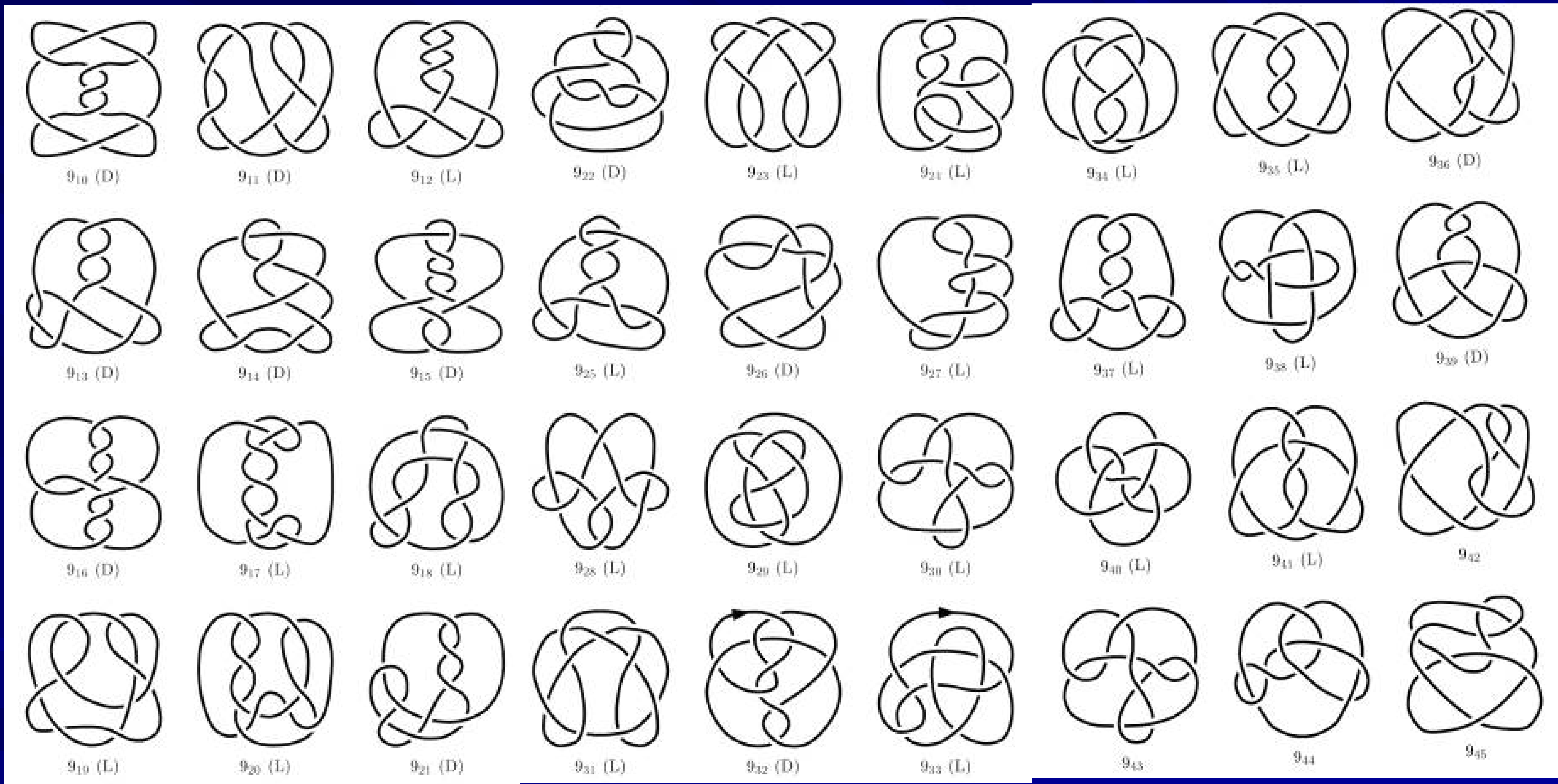




TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES



TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES



NUDOS Y PUZZLES

- Otras cualidades, como:

- Anudar

Anudar: La anilla grande está anudada a la cuerda (con nudo LLANO–trivial-)

Ejemplo de nudo: NUDO LLANO

NUDO LLANO

- Nudo clásico marinero

NUDO LLANO

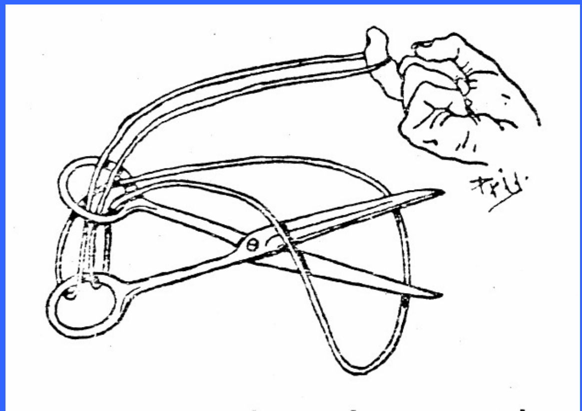
- Enlace (trivial) formado por dos nudos



- Base de muchos puzzles interesantes
- Tijeras / escaleras / …
- Rompecabezas africano
- Puzzles de alambre

NUDO LLANO

- TIJERAS Y ESCALERA



Estudio matemático:

¿Cuáles son las condiciones mínimas para resolverlo?

¿Y para amarrarlo?

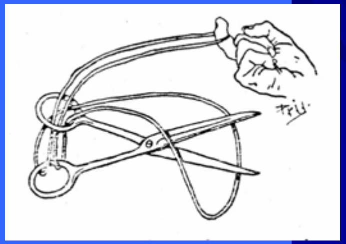
NUDO LLANO

- Estudio matemático:

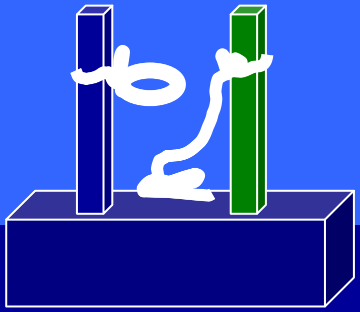
¿Cuáles son las condiciones mínimas para hacer el enlace NUDO LLANO?

a) *Los dos nudos sueltos*

a) *Un nudo suelto y el otro amarrado a algo*

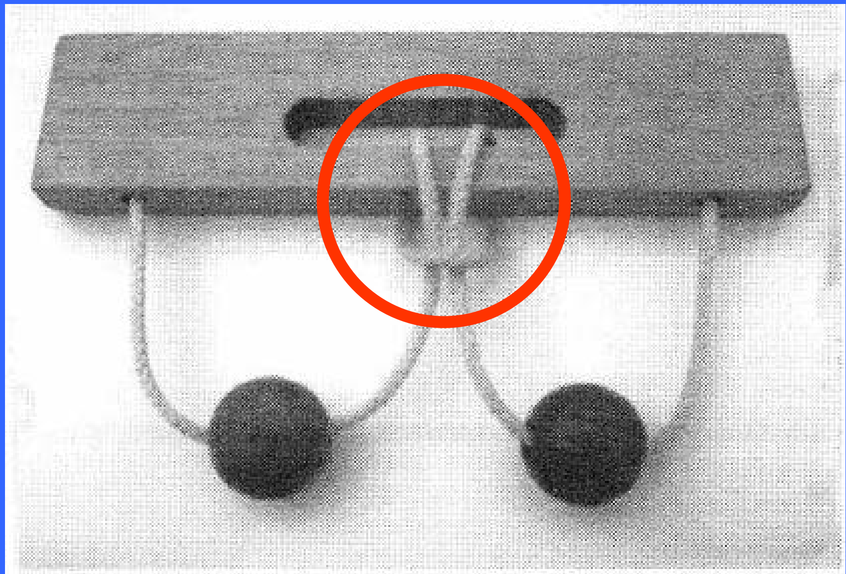


a) *Uno amarrado y el otro abierto, con un extremo amarrado*



NUDO LLANO

ROMPECABEZAS AFRICANO



Los extremos de la cuerda están amarrados a la tabla, y pasan a través de un agujero, haciendo un NUDO LLANO.

Hay que juntar /separar las bolas


SUMA 47

Noviembre 2004, pp. 67-70

Juegos

Rompecabezas africano

Aspectos lúdicos de la Topología

Por su atractivo lúdico, muchos problemas topológicos aparecen en acertijos, pasatiempos...

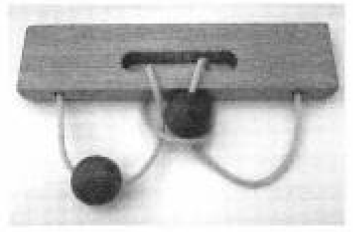
Juegos y rompecabezas topológicos

Grupo Alquerque de Sevilla

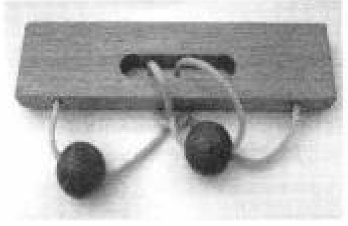
67

ROMPECABEZAS AFRICANO

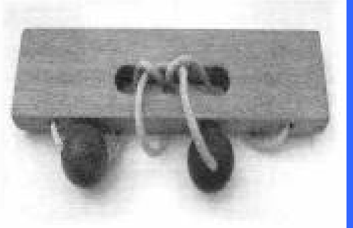
- RESOLUCIÓN



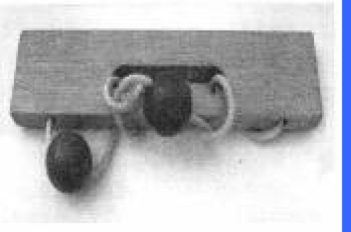
Paso 1



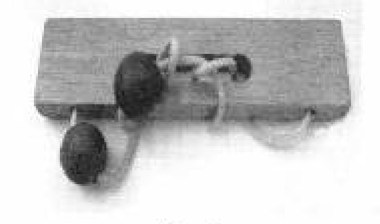
Paso 2



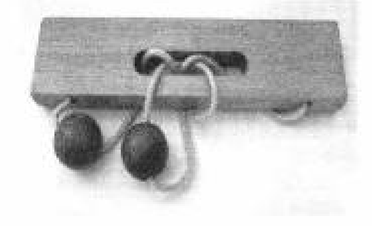
Paso 3



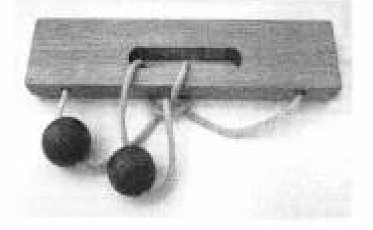
Paso 4



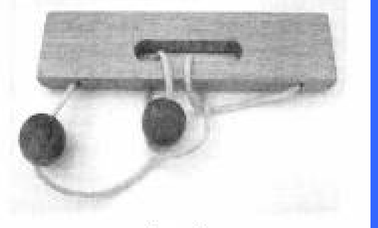
Paso 5



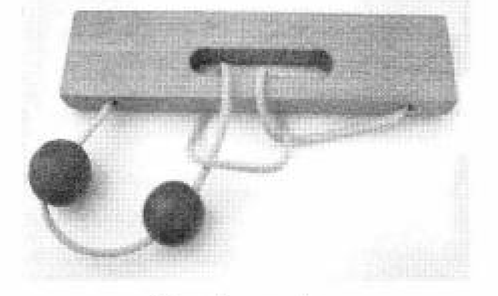
Paso 6



Paso 7



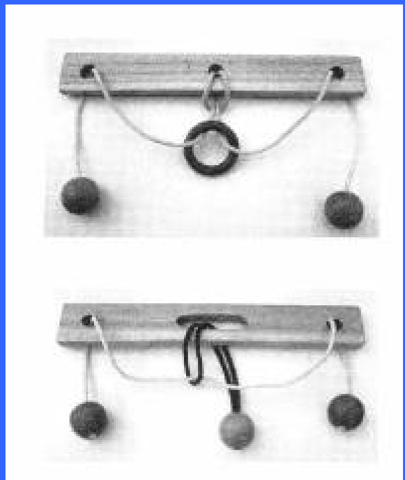
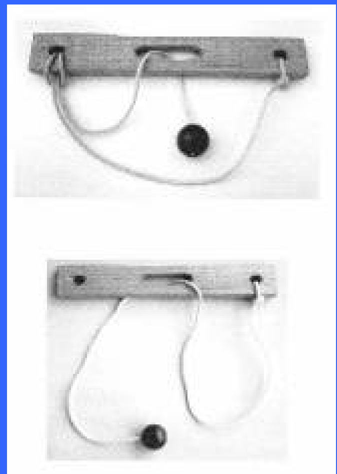
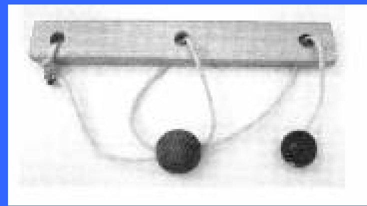
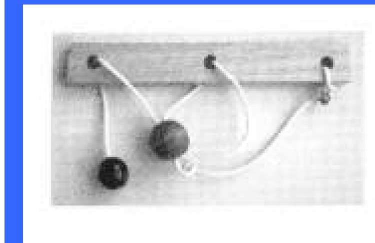
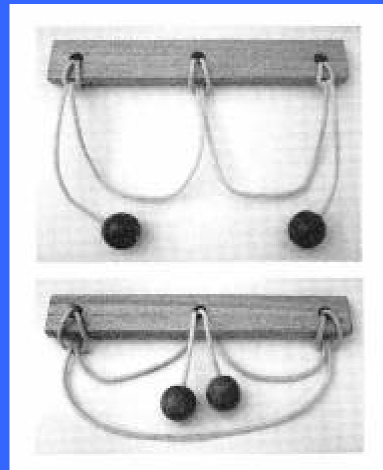
Paso 8



Puzzle resuelto

ROMPECABEZAS AFRICANO

- VARIEDADES

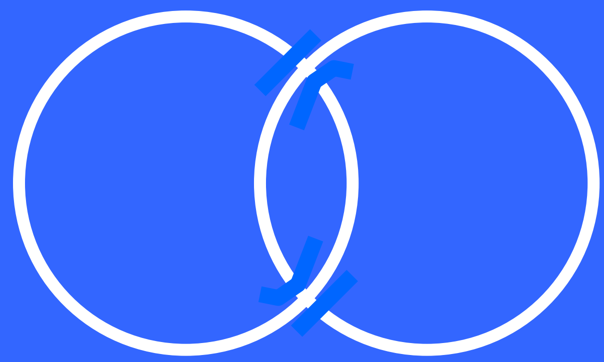


Otros puzzles de alambre basados en el NUDO LLANO

TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES

- Los nudos se unen formando ENLACES

NUDO LLANO: Enlace trivial (Los dos nudos se separan)



NUDOS ENLAZADOS: Enlace NO trivial (Los dos nudos no pueden separarse sin abrirlos)

TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES

- La Teoría de Nudos nos lleva a estudiar algunas cualidades que nos facilitan el estudio de los puzzles
  – Si las piezas se abrazan o enlazan para formar enlaces
  – Si forman un enlace trivial o no

Enlace (anillos

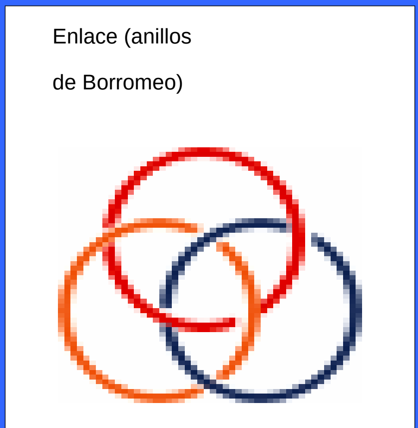
de Borromeo)

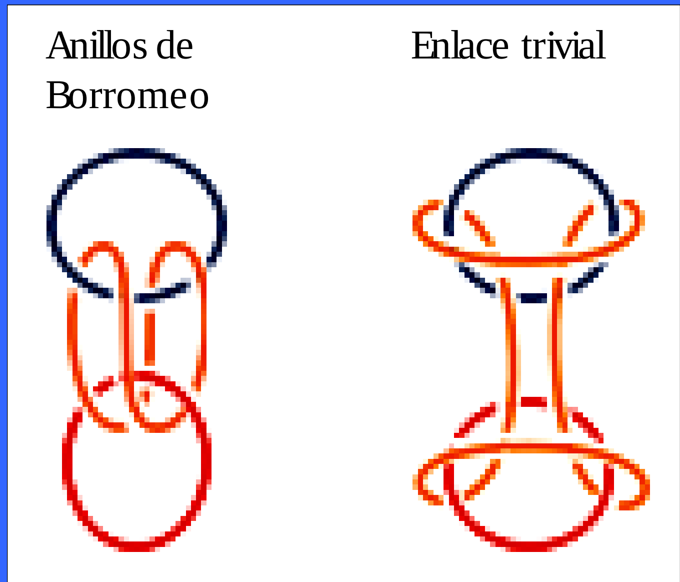
Enlace (anillos
de Ballantine)

TEORÍA DE NUDOS Y PUZZLES

ENLACES ISOTÓPICOS

- Dos enlaces son **isotópicos** si uno de ellos puede ser llevado al otro mediante transformaciones topológicas





PUZZLES Y TEORÍA DE NUDOS

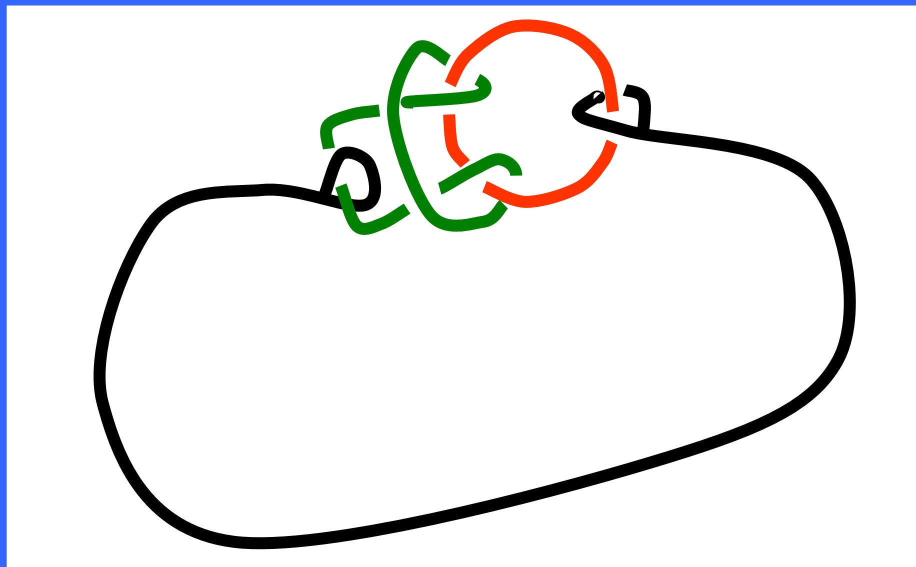
Montoya y González (2001) establecen una condición necesaria para tener solución:

Un Puzzle de alambre tiene solución sólo si transformado en puzzle de cuerda puede transformarse de forma continua en otro con el puzzle resuelto

PUZZLES Y TOPOLOGÍA

- Ejemplo.

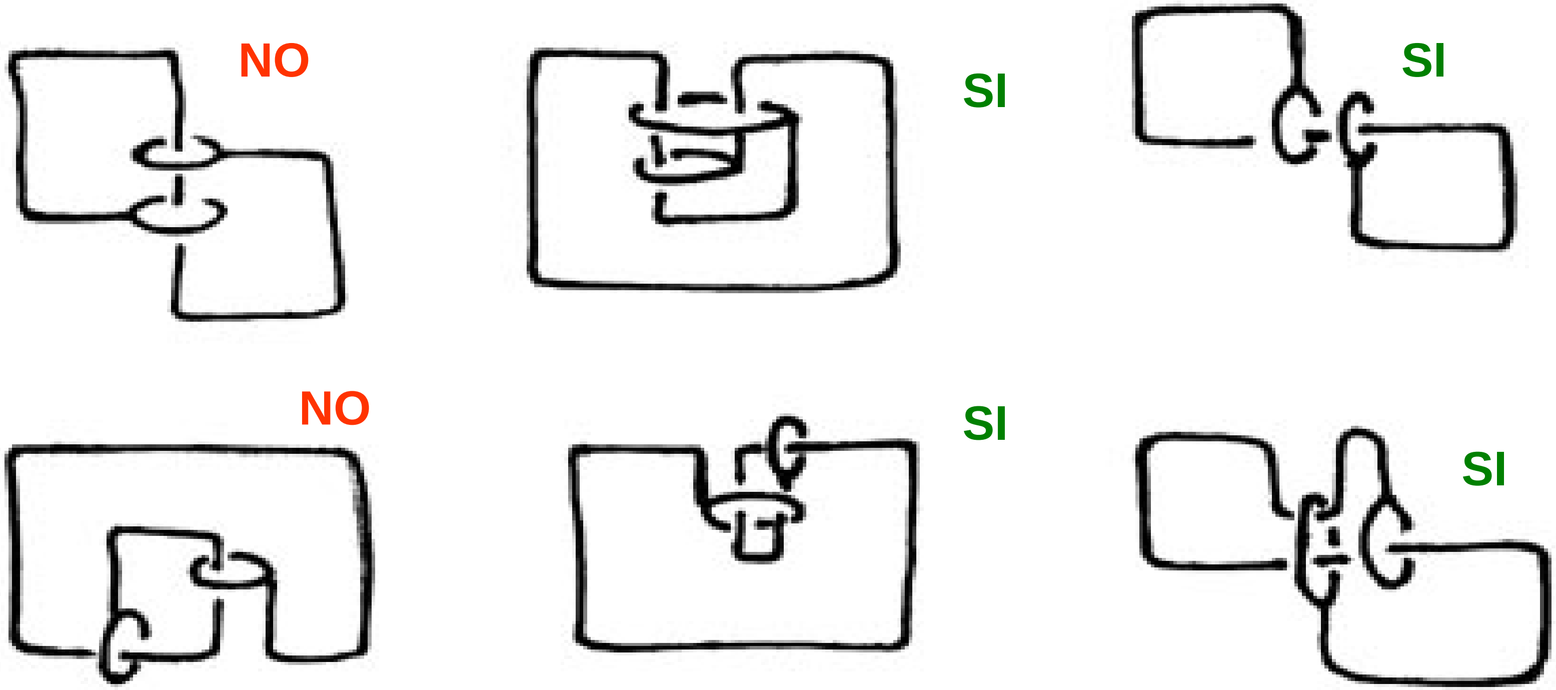
PUZZLE TRANSFORMADO TOPOLÓGICAMENTE



PUZZLES Y TOPOLOGÍA

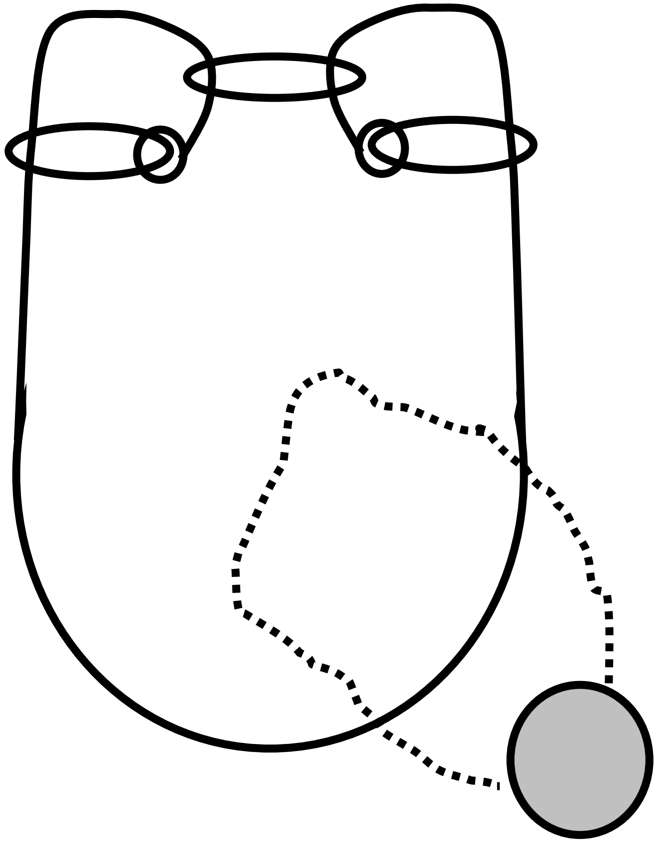
GRUPO A CERRADOS
Ejercicio

Analizar las siguientes estructuras base
y estudiar cuáles tendrán solución como puzzles
(se transforman topológicamente en un segmento
rematado con dos aros)



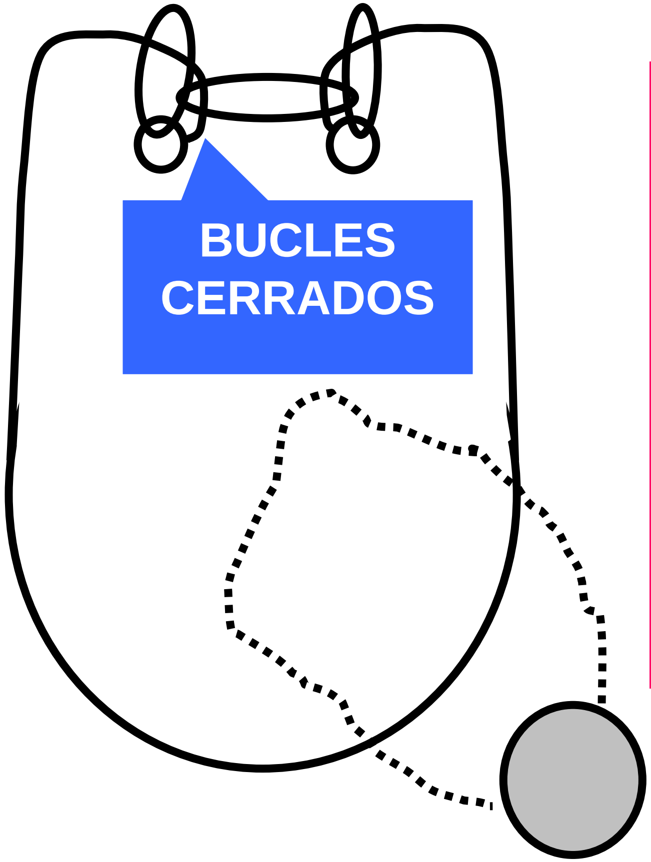
Para hacer las transformaciones hay que realizar un ejercicio mental, que exige una buena visión espacial ¿Cómo simplificar este ejercicio?

PUZZLES Y TOPOLOGÍA



EJEMPLO:
Deformaciones para estudiar si tiene solución el

PUZZLES Y TOPOLOGÍA

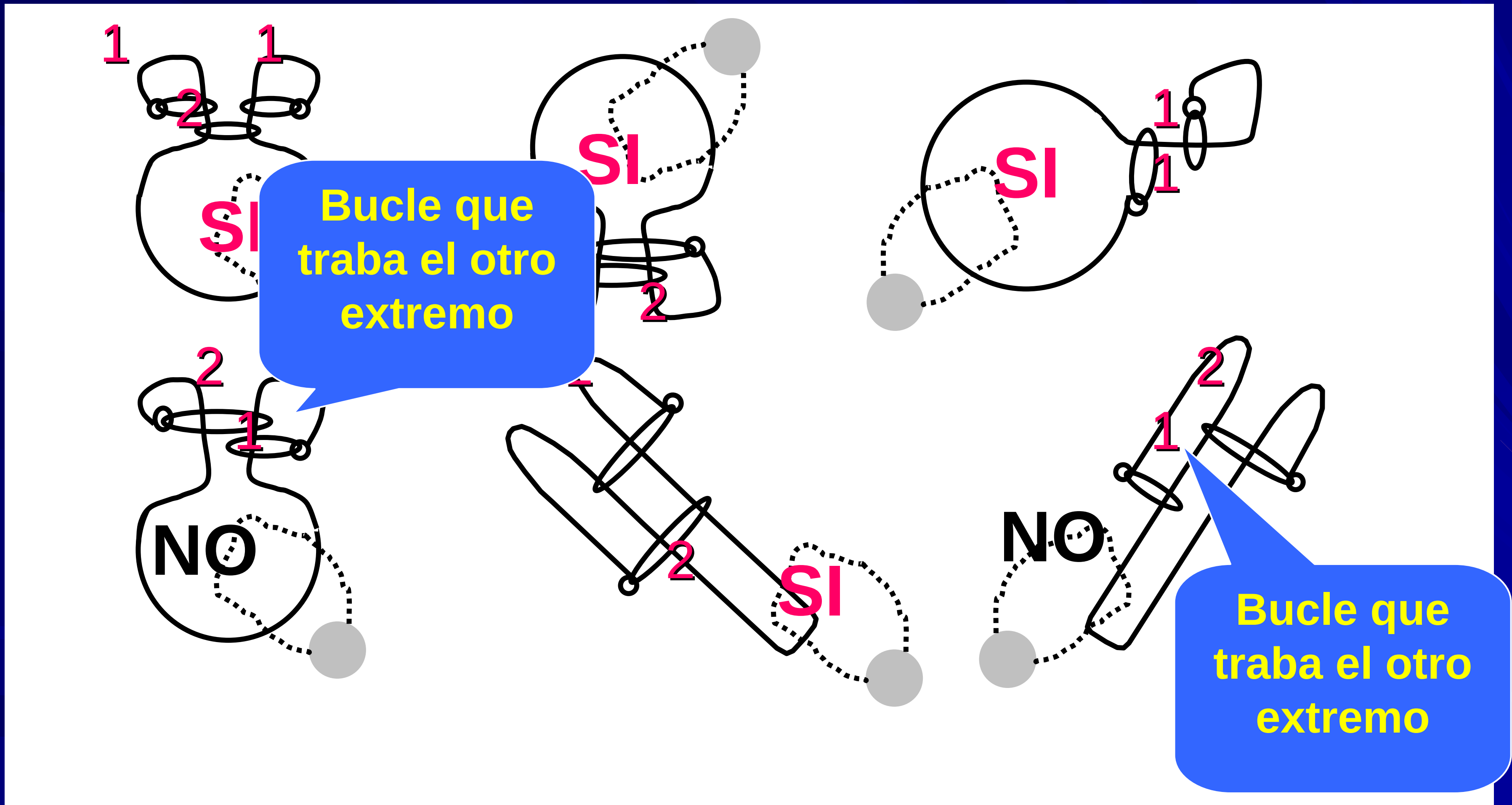


En cada extremo aparece un bucle cerrado, que no se puede deshacer, ya que la anilla central lo impide.

SE TRANSFORMA EN UN ENLACE NO TRIVIAL

NO TIENE SOLUCIÓN

Suponiendo que los nudos son elásticos, hacer deformaciones para llegar a decidir en cuáles de los siguientes puzzles (enlaces) se pueden separar los nudos



PUZZLES, TOPOLOGÍA Y TEORÍA DE NUDOS

Se pueden obtener algunas condiciones de solución:

- Si la anilla de un extremo la atraviesa un solo alambre y se cierra sobre si misma forma un BUCLE.
- Si este bucle encierra al otro extremo un número impar de alambres, TRABA a ese extremo y el puzzle NO TIENE SOLUCIÓN.
- Si los bucles atraviesan al otro extremo un número par de veces, o no hay bucles, TIENE SOLUCIÓN

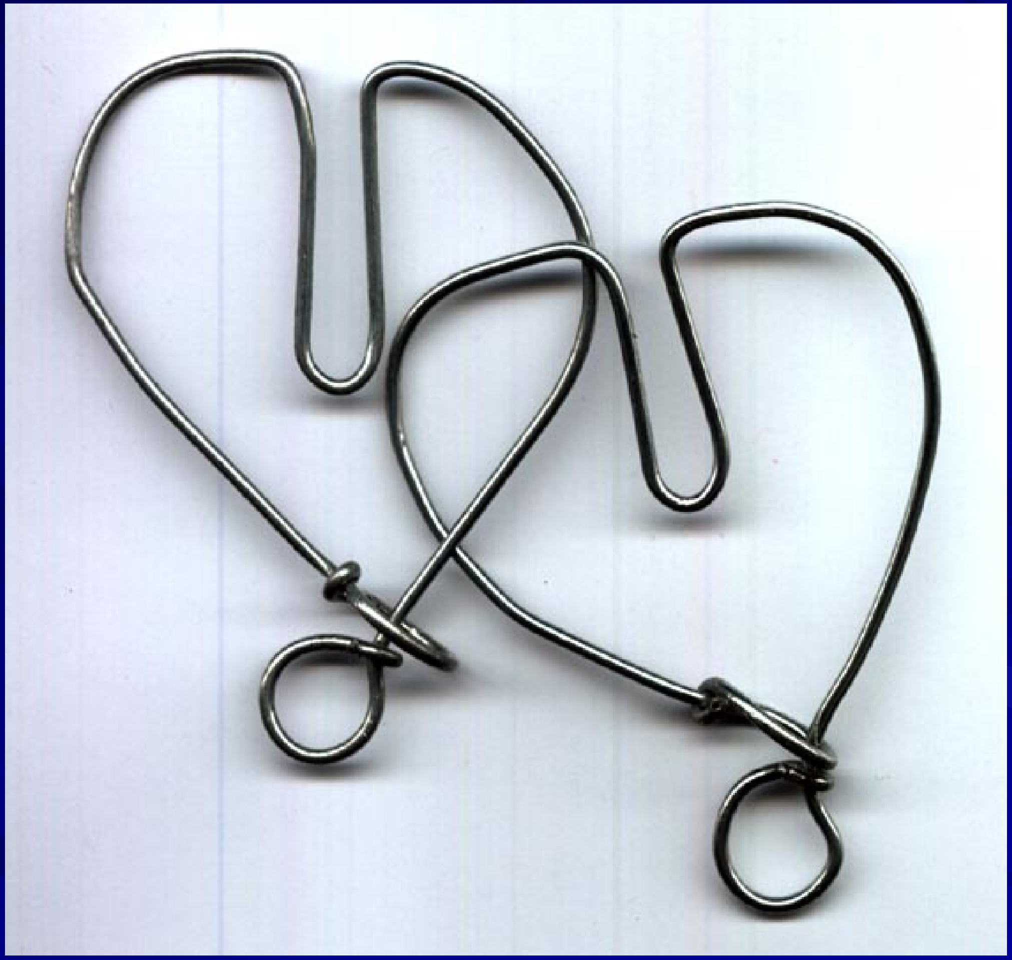
PUZZLES

Estas condiciones nos han permitido CLASIFICAR LOS PUZZLES, según si las piezas están abiertas o cerradas y el tipo de solúción:

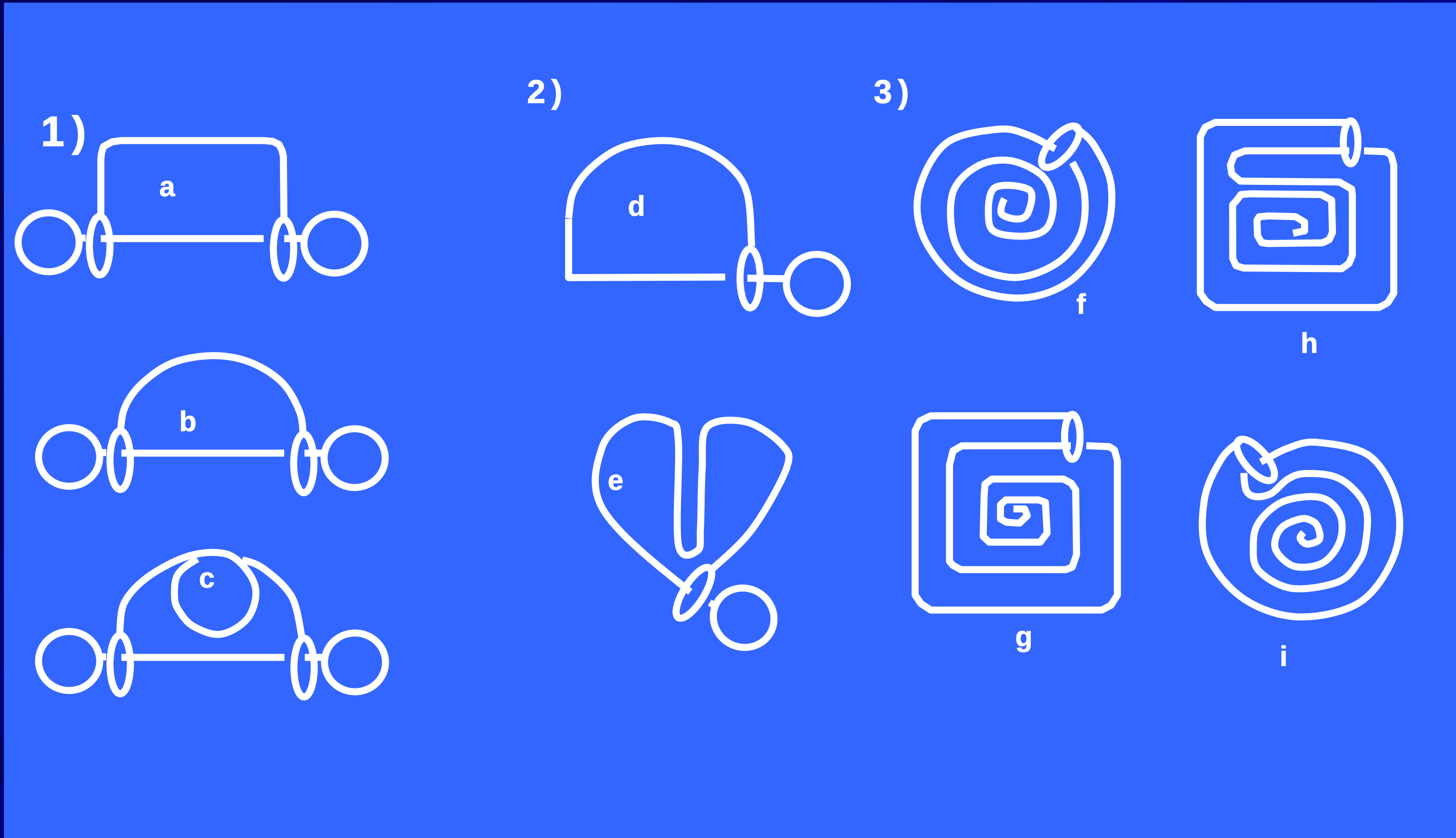
- METER – SALVAR
- ESCAMOTEABLES
- CLAVOS

(Flores, 2001)

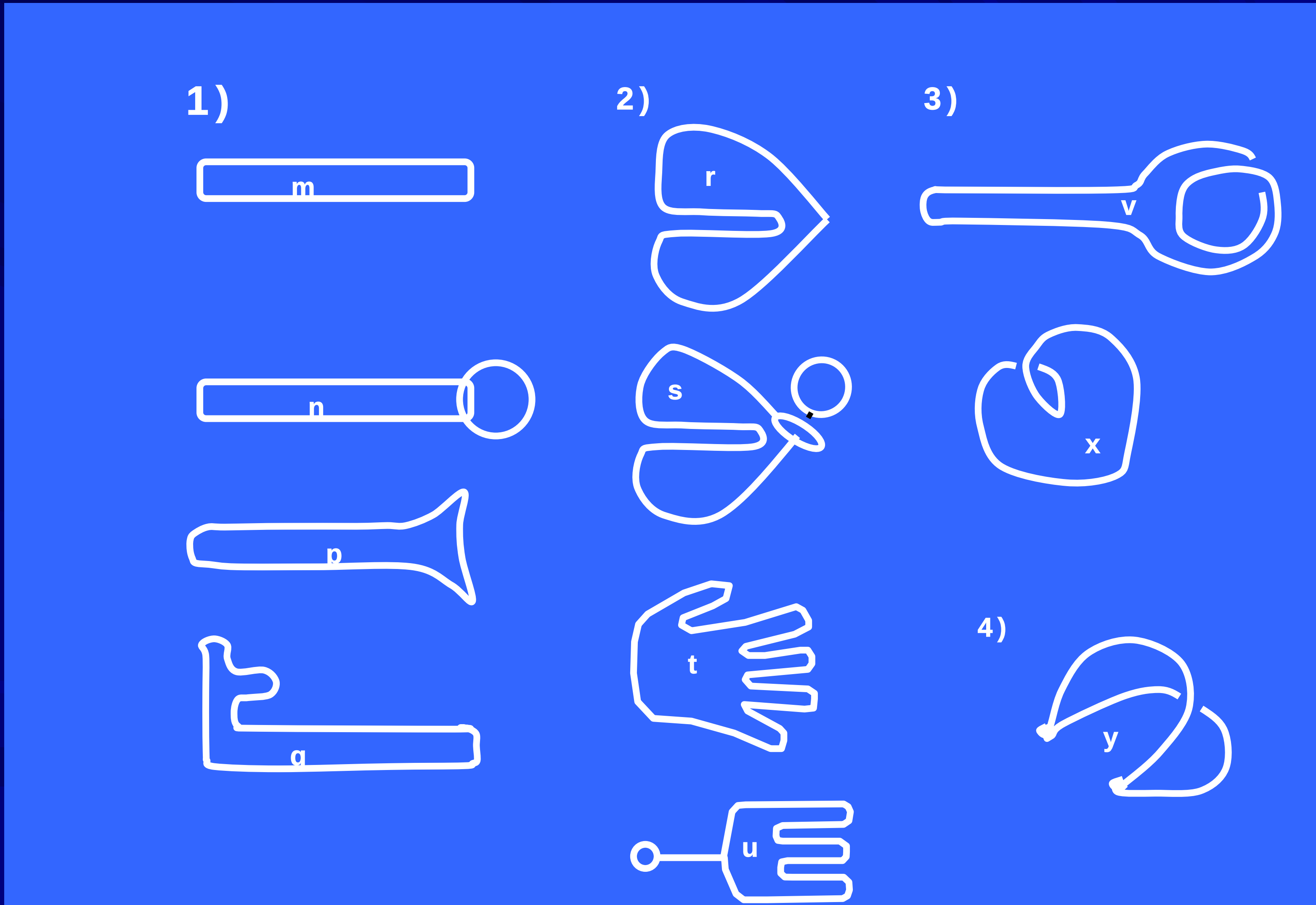
METER-SALVAR



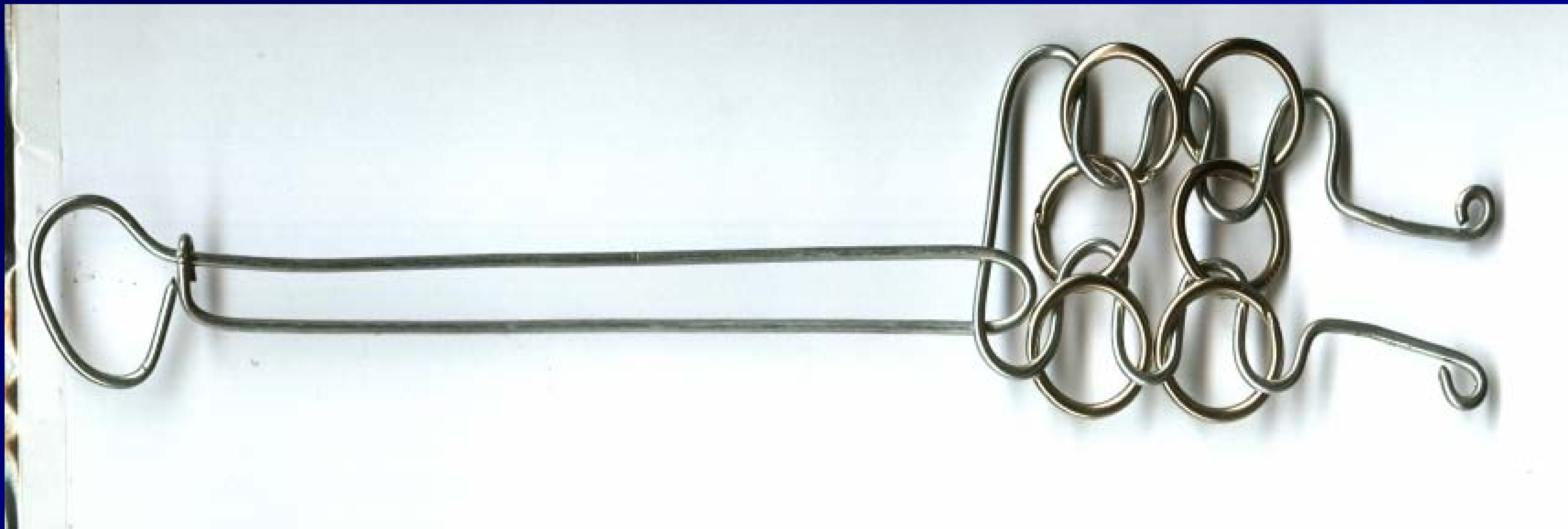
METER - SALVAR, SIMPLES: ESTRUCTURAS BASE

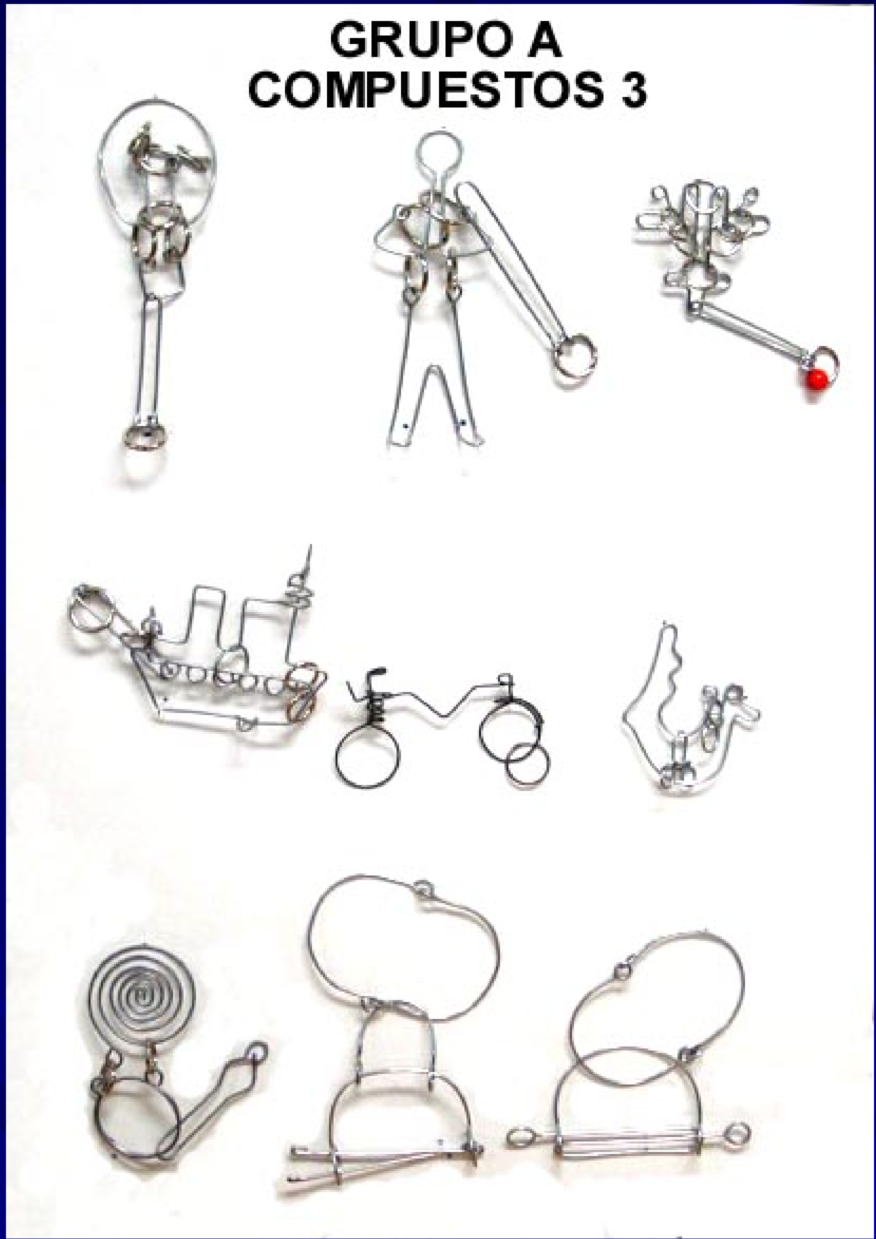


METER – SALVAR SIMPLES: PIEZAS PROBLEMA



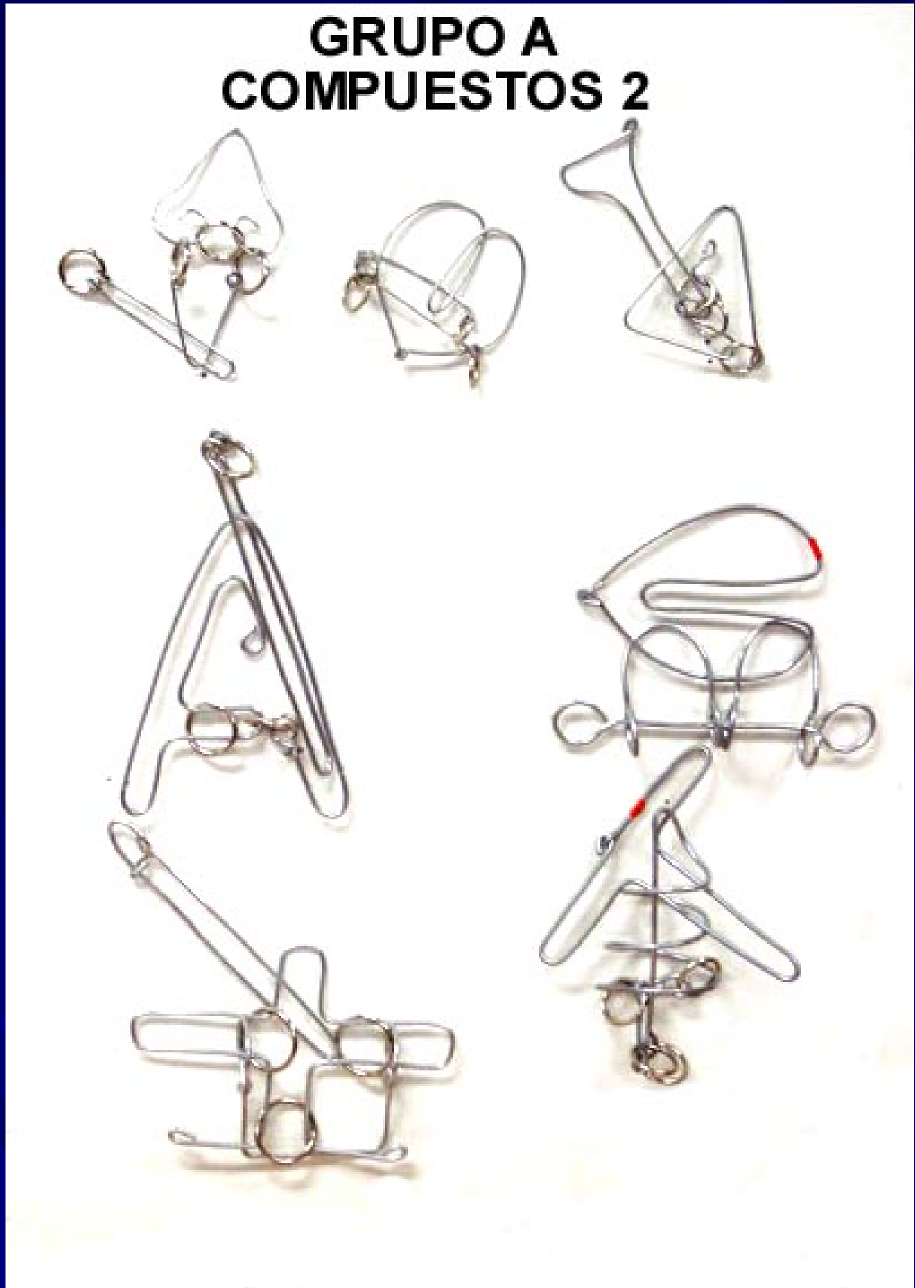
METER-SALVAR: COMPUESTOS

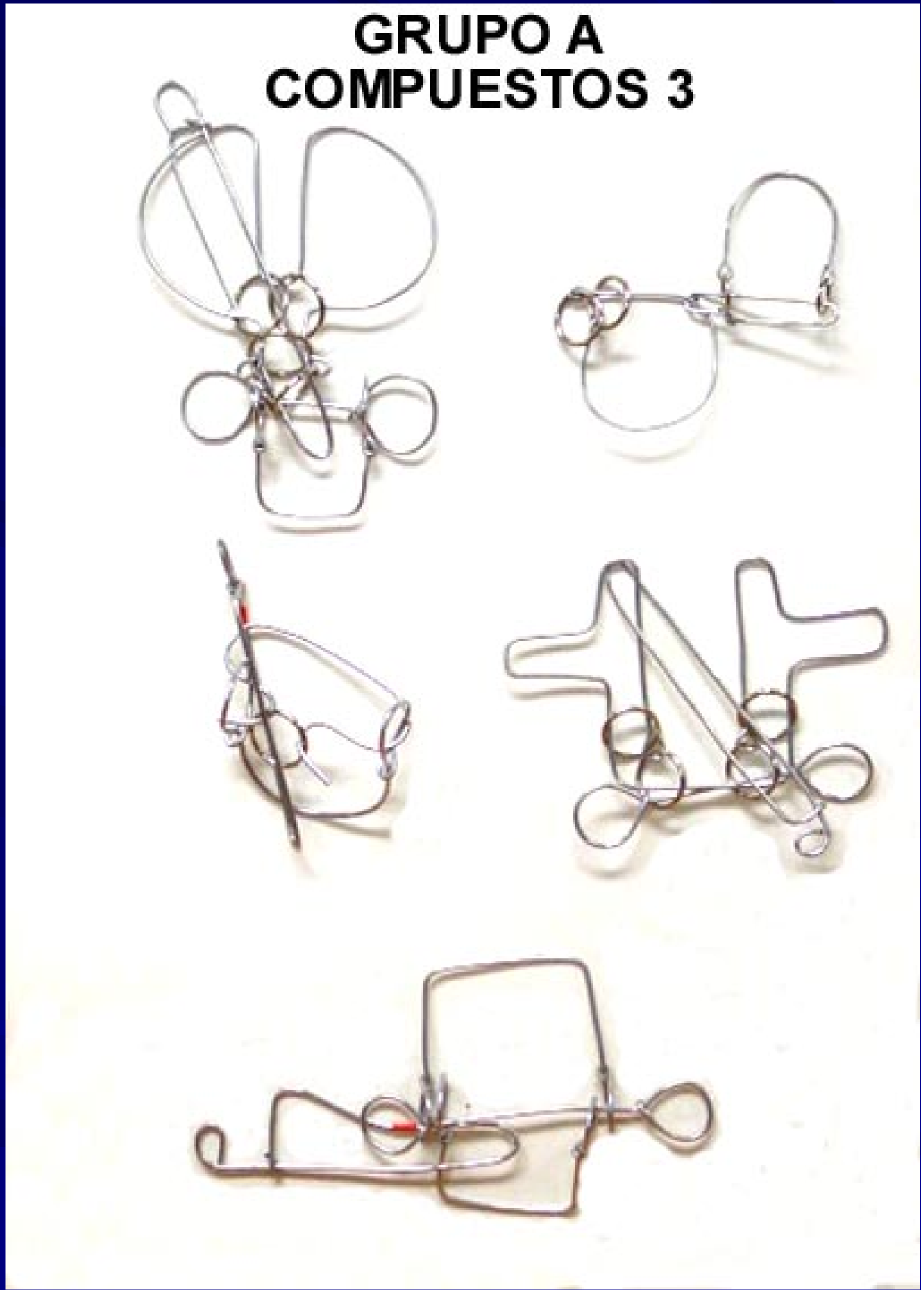




Meter-salvar
Compuestos 1

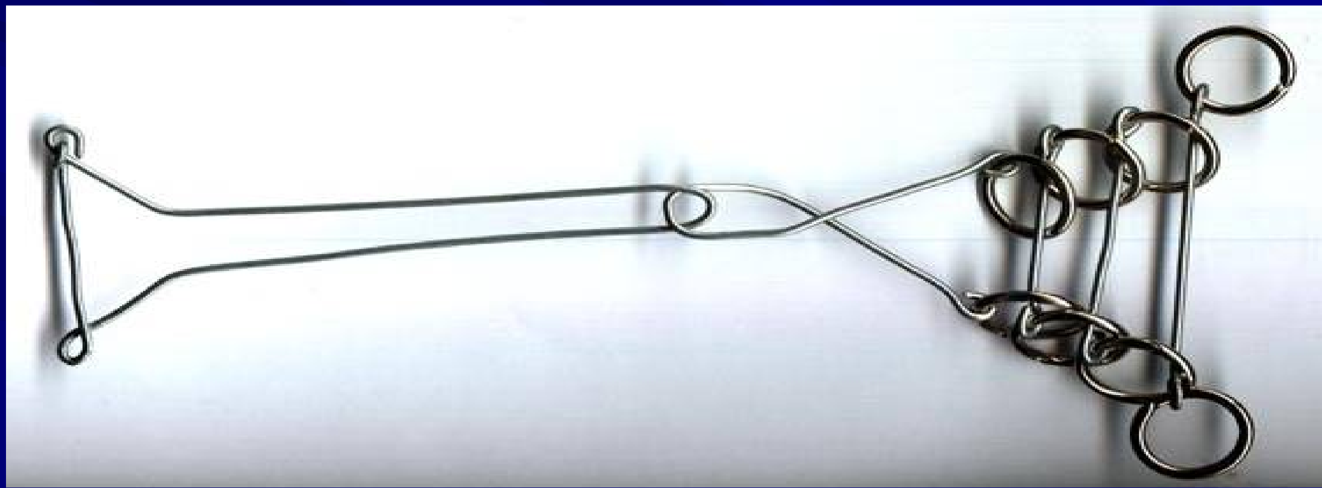
Meter-salvar Compuestos 2





Meter-salvar Compuestos 3

METER-SALVAR COMPUESTOS: ITERATIVOS



METER-SALVAR COMPUESTOS: ITERATIVOS

AROS CHINOS

- Está formado por varias piezas que se abrazan consecutivamente
- Ha sido muy estudiado en matemáticas
- Adopta muchas formas

AROS CHINOS

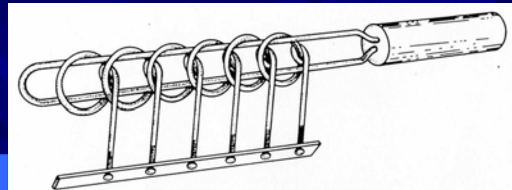
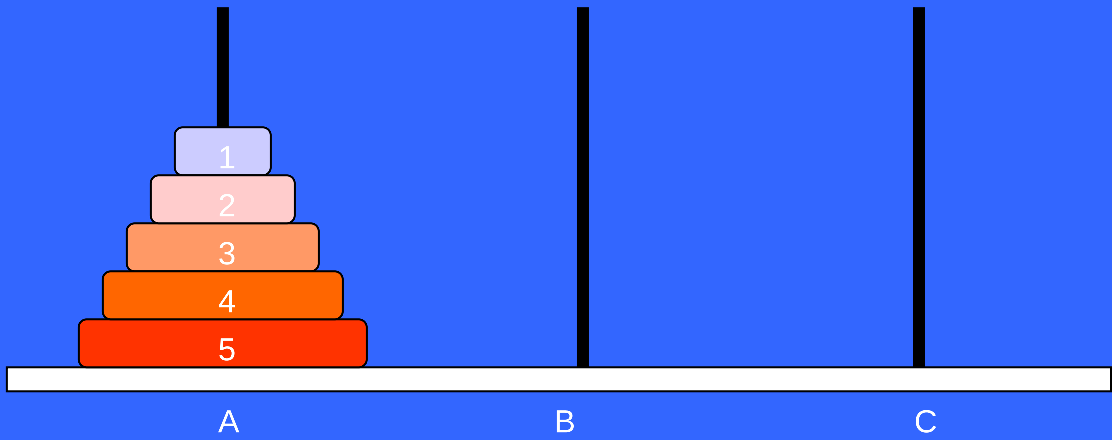


Fig. 5 El rompecabezas de los aros chinos

BAGUENODIER

- Proceso iterativo, admite algoritmo (como en LA TORRE DE HANOI).



- Para ello se utiliza el “CÓDIGO GRAY”

AROS CHINOS

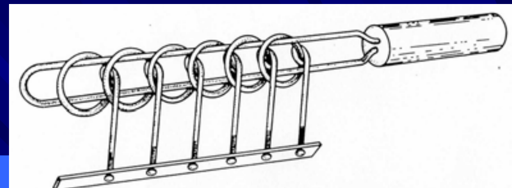


Fig. 5 El rompecabezas de los aros chinos

"CÓDIGO GRAY"

- La pieza problema (cerrada) sólo puede tener dos posiciones respecto a cada aro: lo abraza (1), lo deja fuera (0)
- Se puede representar cada posición por una secuencia de 1 y 0

1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0

Posición inicial difícil

AROS CHINOS

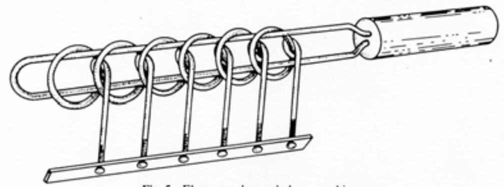
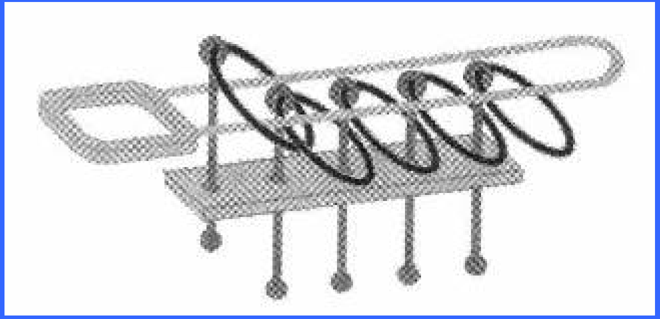


Fig. 5 El rompecabezas de los aros chinos

"CÓDIGO GRAY"

- Partimos de la posición difícil con 5 anillas (A, B, C, D y E). La A es la última, que no abraza a otra anilla. La pieza problema sólo abraza a la E (código Gray: 10000)



E D C B A

1 0 0 0 0

La posición siguiente consiste en enlazar a la anilla A (única que puede)

1 0 0 0 1

Luego la secuencia numérica es:

10000

10001

10011

AROS CHINOS

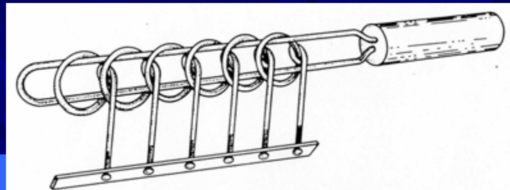


Fig. 5 El rompecabezas de los aros chinos

"CÓDIGO GRAY"

- El Código Gray apareció en la primera época de los ordenadores, en los que se trató de que el paso de un número al siguiente acarreara el cambio de un solo dígito.
- En el sistema binario, muchas veces cambian más de un dígito:

0000	0011	01**10**
0001	0**100**	0111
00**10**	0101	**1000**

AROS CHINOS

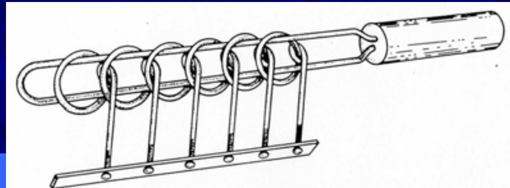


Fig. 5 El rompecabezas de los aros chinos

"CÓDIGO GRAY"

Frank Gray (1952) inventó un orden numérico de números de base 2 que cambian un solo dígito: El siguiente se obtiene cambiando el dígito más cercano al extremo derecho:

0000	0010	0101	1101
0001	0110	0100	1111
0011	0111	1100	1110

AROS CHINOS

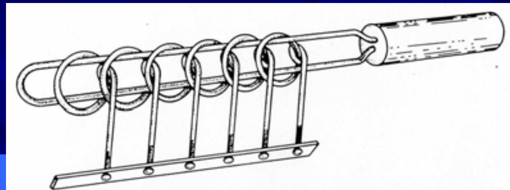


Fig. 5 El rompecabezas de los aros chinos

"CÓDIGO GRAY"

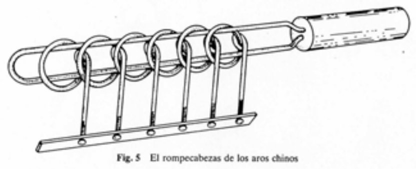
- La correspondencia entre la expresión binaria y el Código Gray aparece en el siguiente esquema:

Meter la pieza problema en los Aros

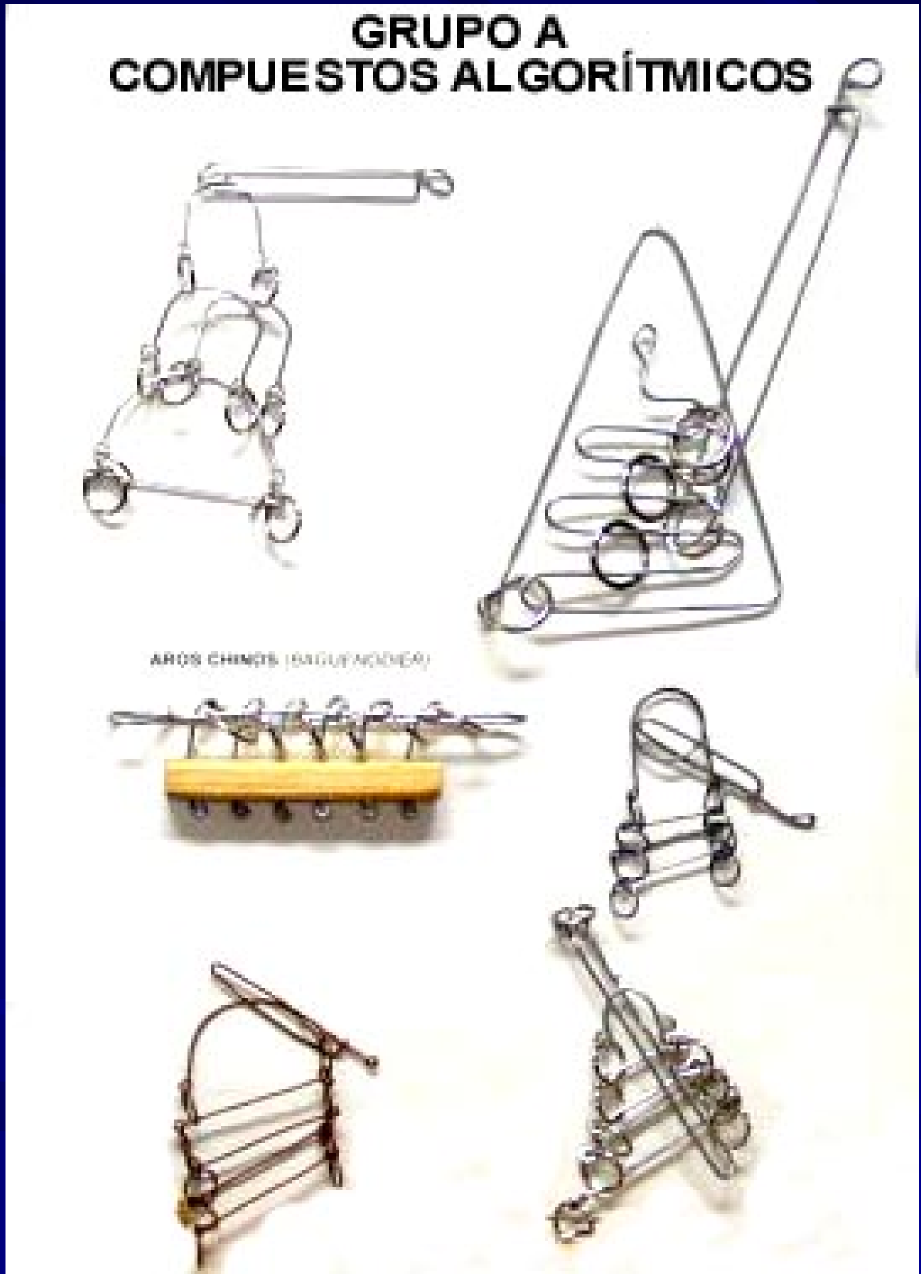
```
            Normal                                   Gray
                        0000                                   0000
                        0001                                   0001
                        0010                                   0011
                        0011                                   0010
               000      0100                        000        0110
               001      0101                        001        0111
       00      010      0110               00       011        0101
0      01      011      0111        0      01       010        0100
-->---->------>-----                -->---->------>-----
1      10      100      1000        1      11       110        1100
       11      101      1001               10       111        1101
               110      1010                        101        1111
               111      1011                        100        1110
                        1100                                   1010
                        1101                                   1011
                        1110                                   1001
                        1111                                   1000
```

sacar la pieza problema de los Aros

AROS CHINOS



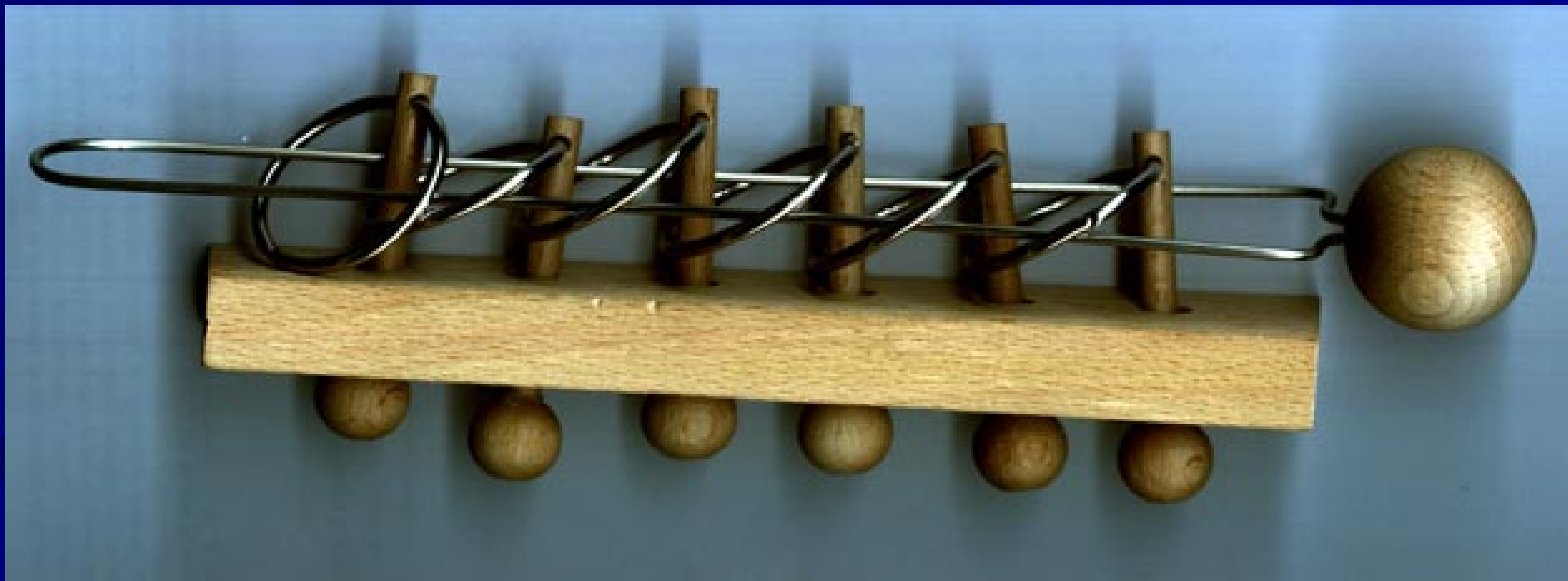
Se aplica a otros puzzles. SPIN-OUT

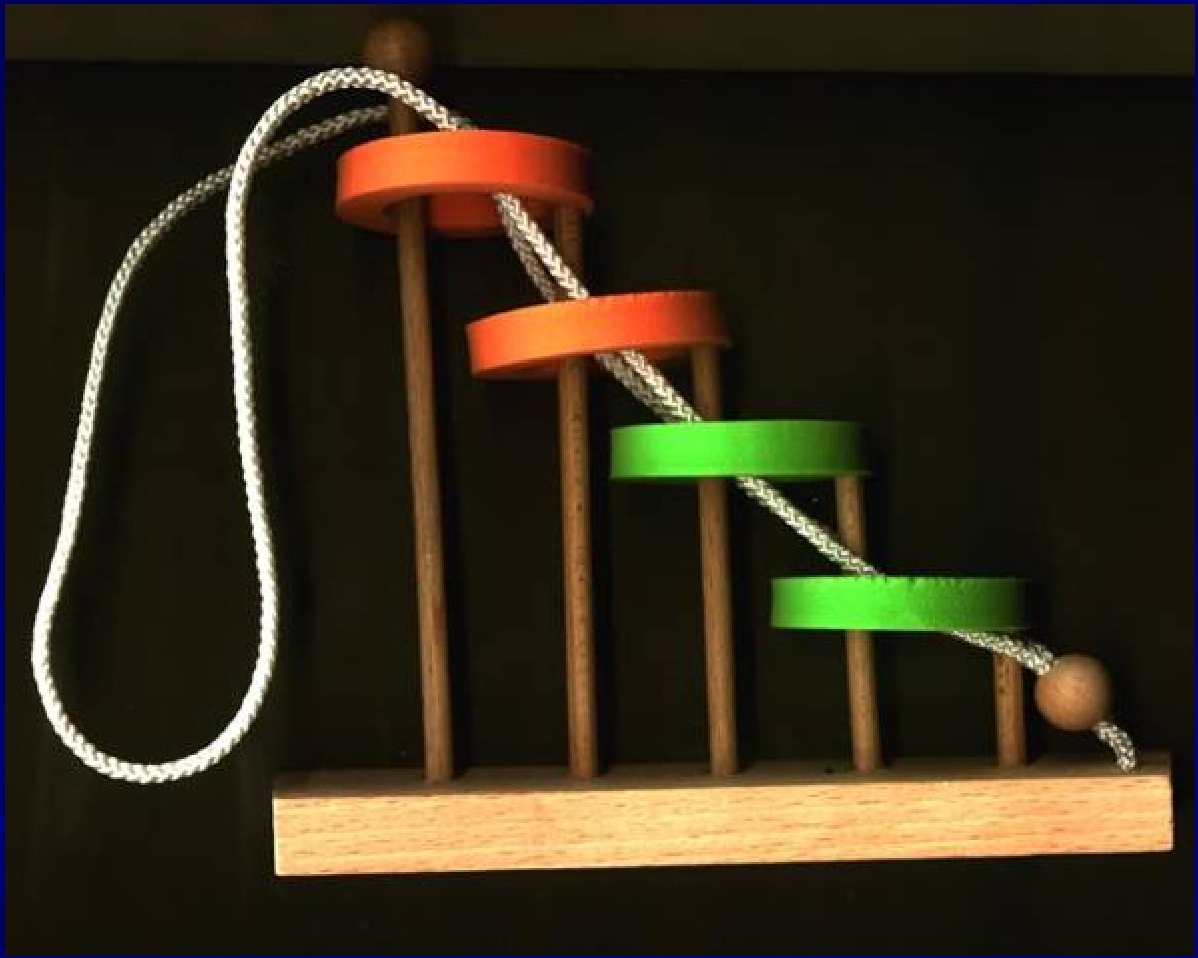


METER-
SALVAR
COMPUESTOS
4
ITERATIVOS

AROS CHINOS
DOBLES Y
SIMPLES

METER-SALVAR
COMPUESTOS 4 ITERATIVOS
AROS CHINOS 1



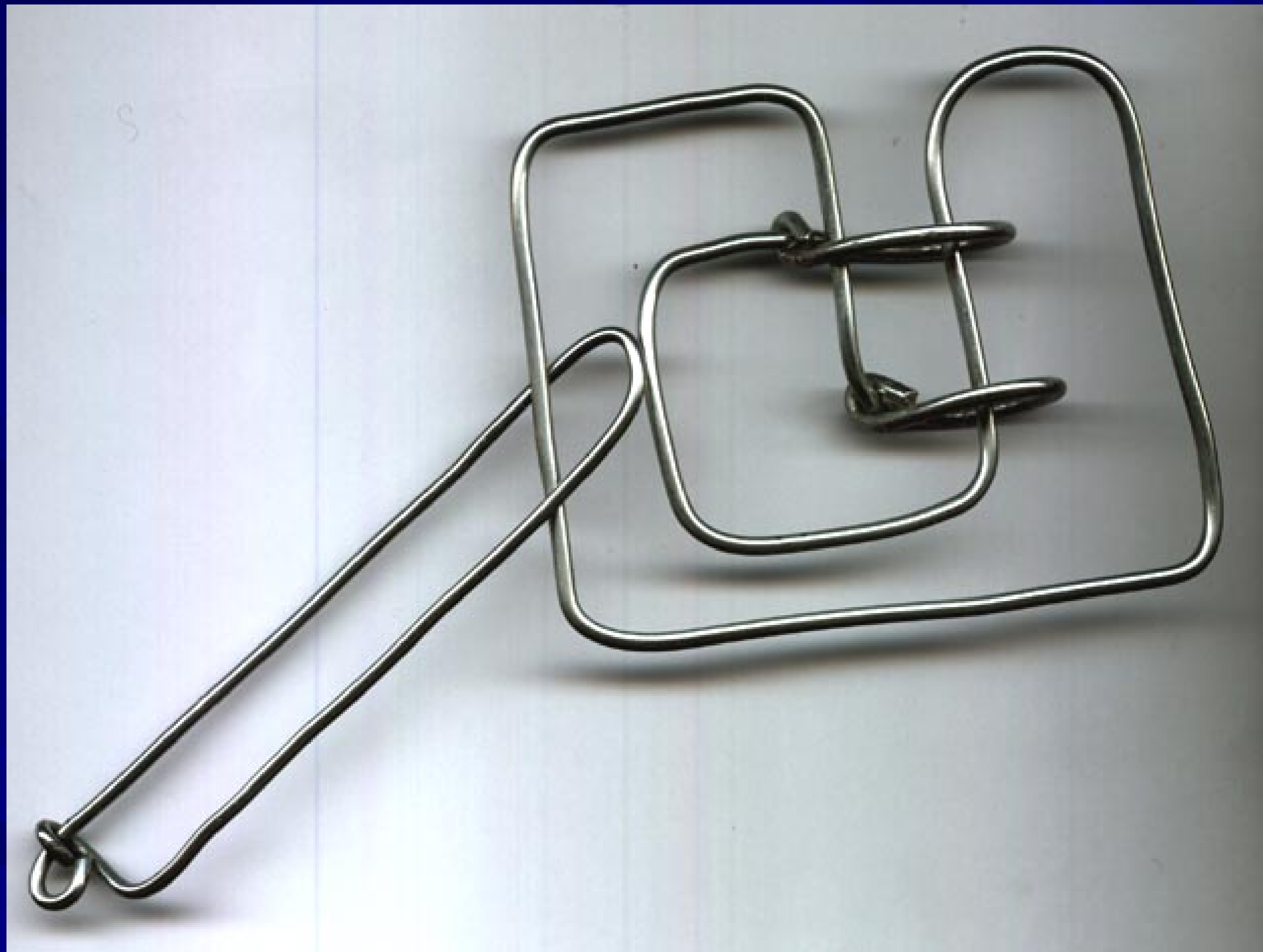


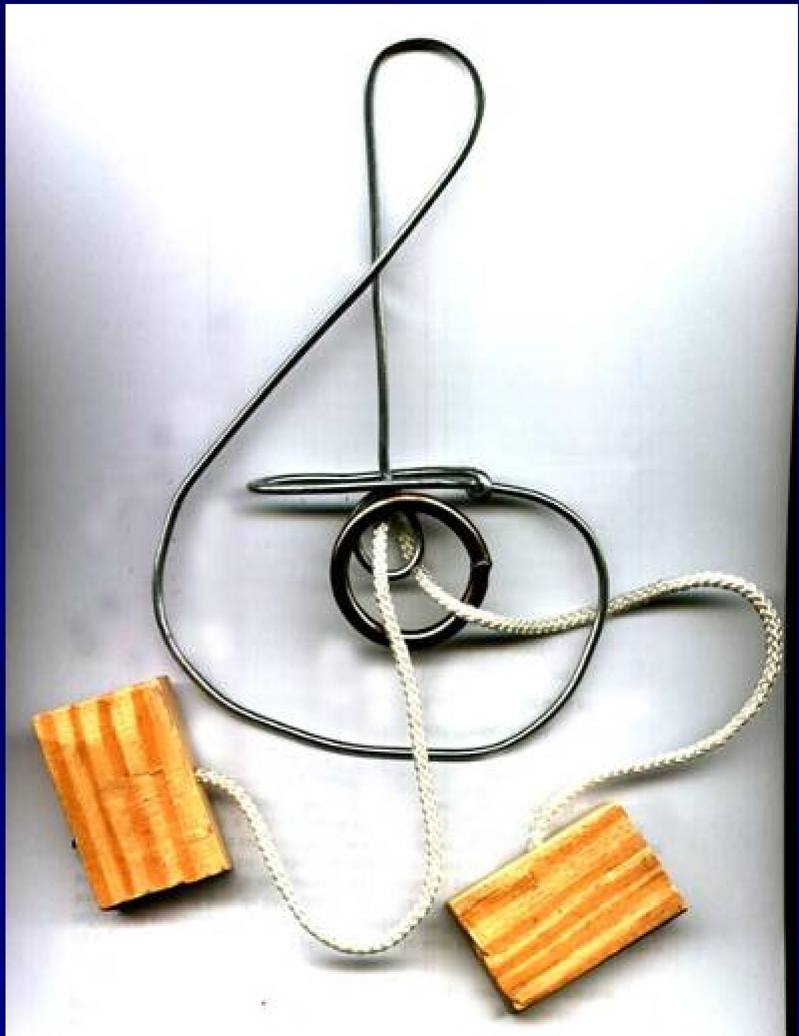
METER-SALVAR
COMPUESTOS 4
ALGORITMÍCOS
AROS CHINOS 2

METER-SALVAR COMPUESTOS 4 ALGORITMÍCOS

AROS CHINOS 3

METER-SALVAR COMPUESTOS CERRADOS

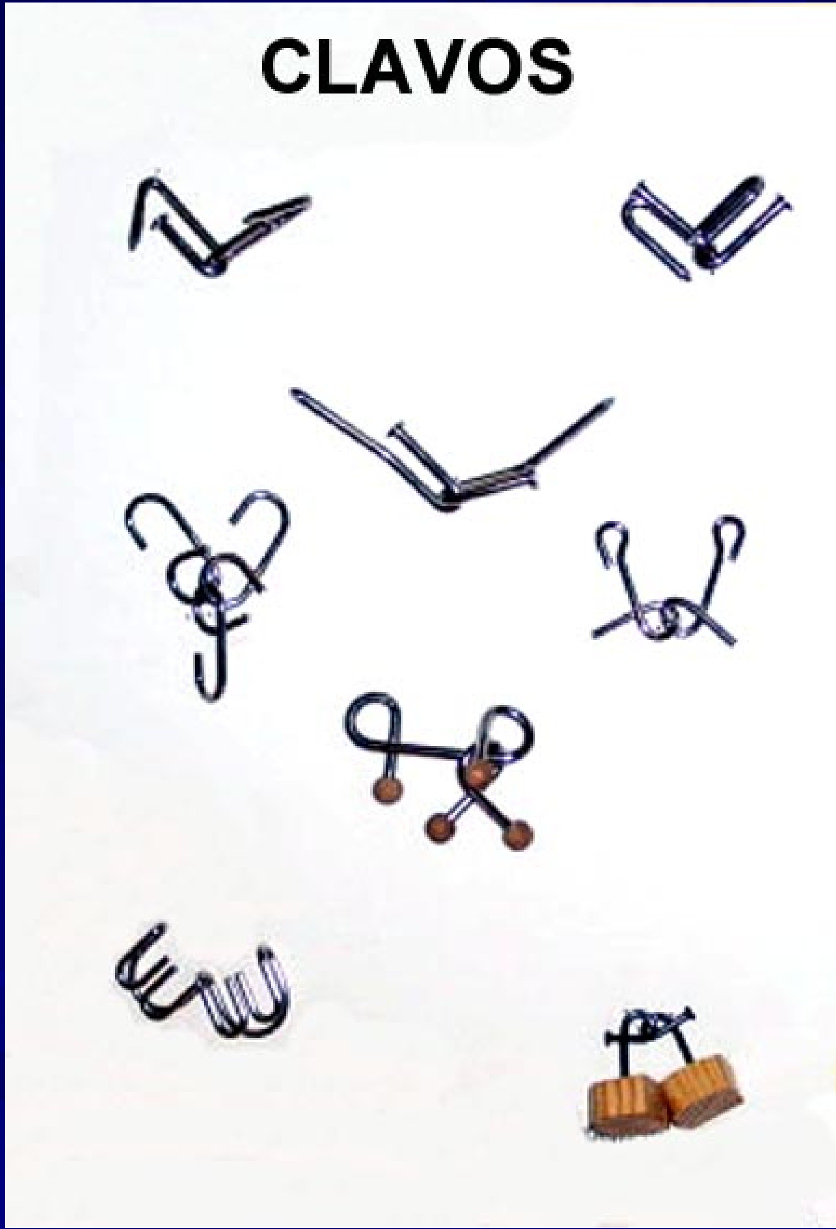




METER-SALVAR Cerrados

CLAVOS

CLAVOS 1



CLAVOS 1

CLAVOS 1

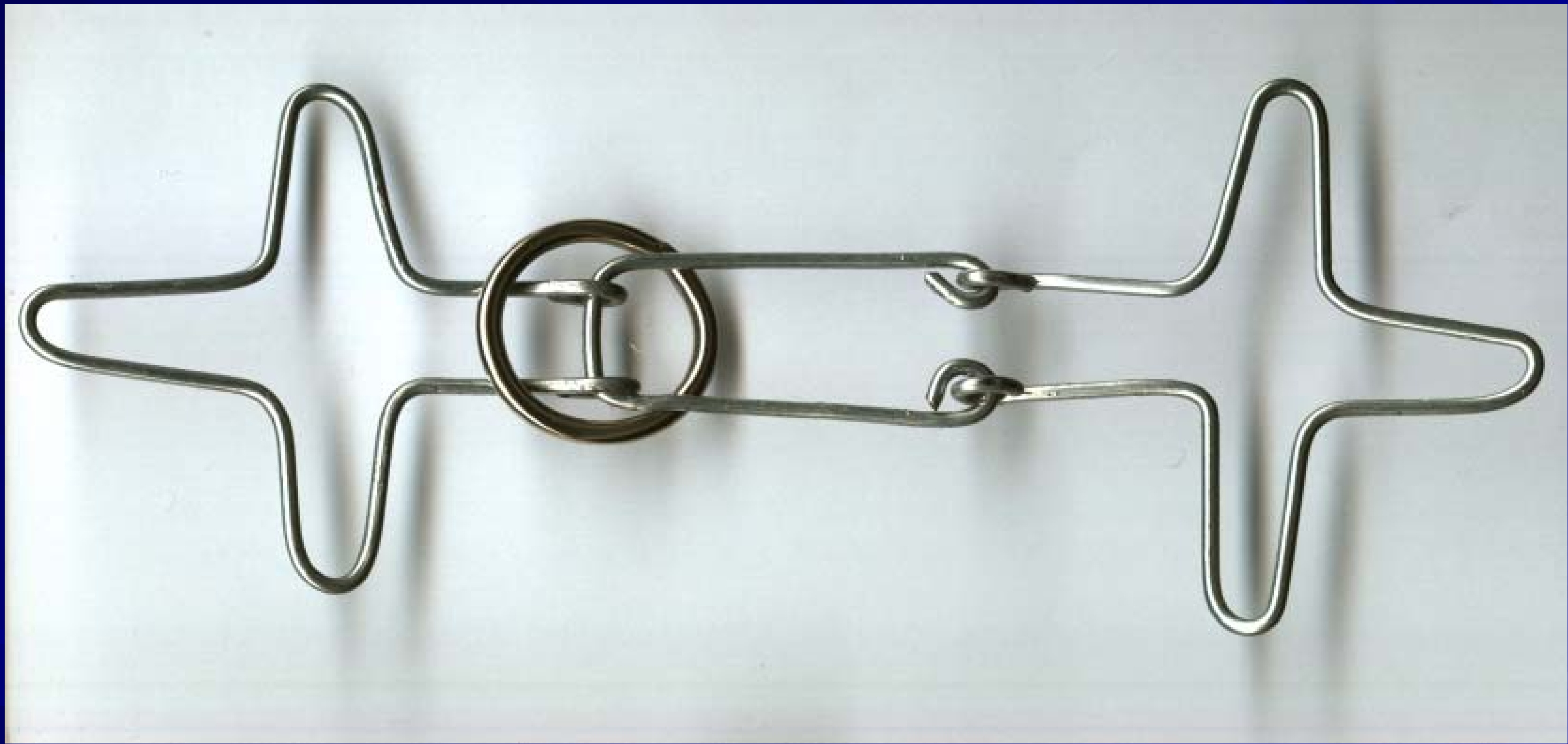


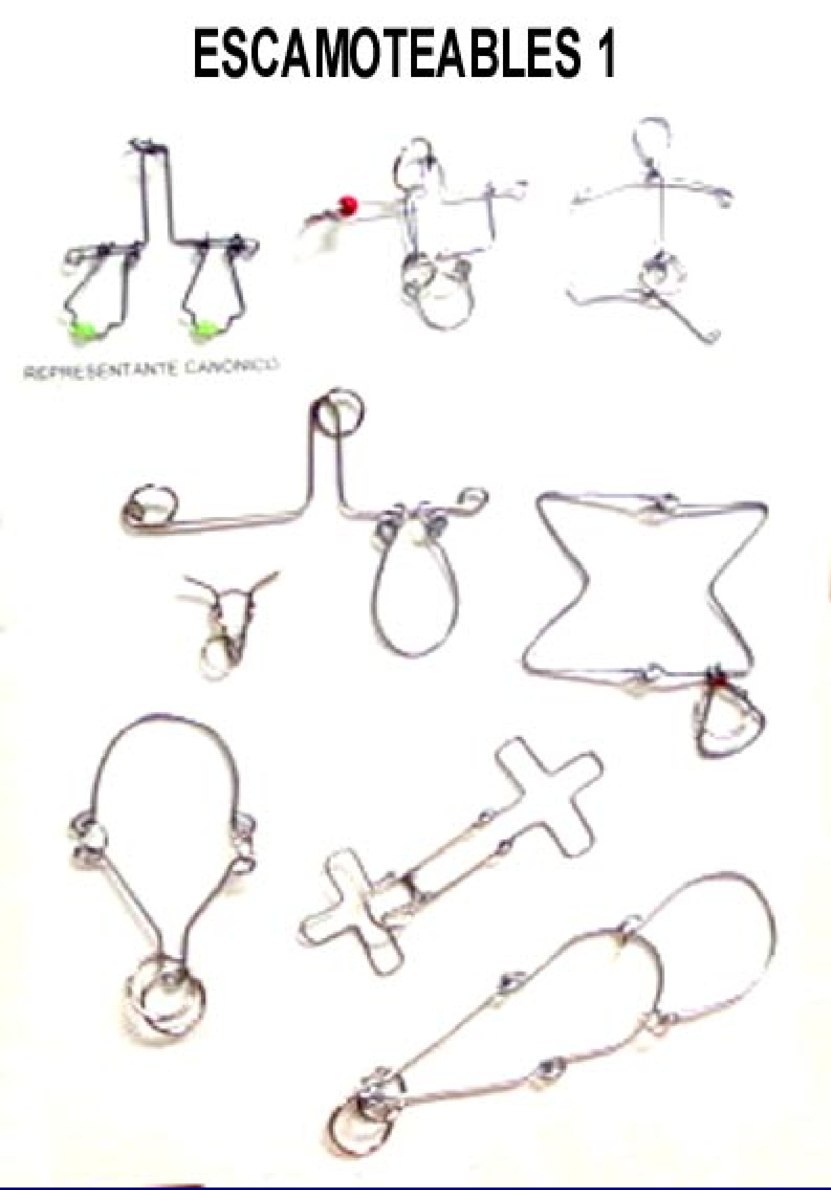



CLAVOS 2

CLAVOS 2

ESCAMOTEABLES





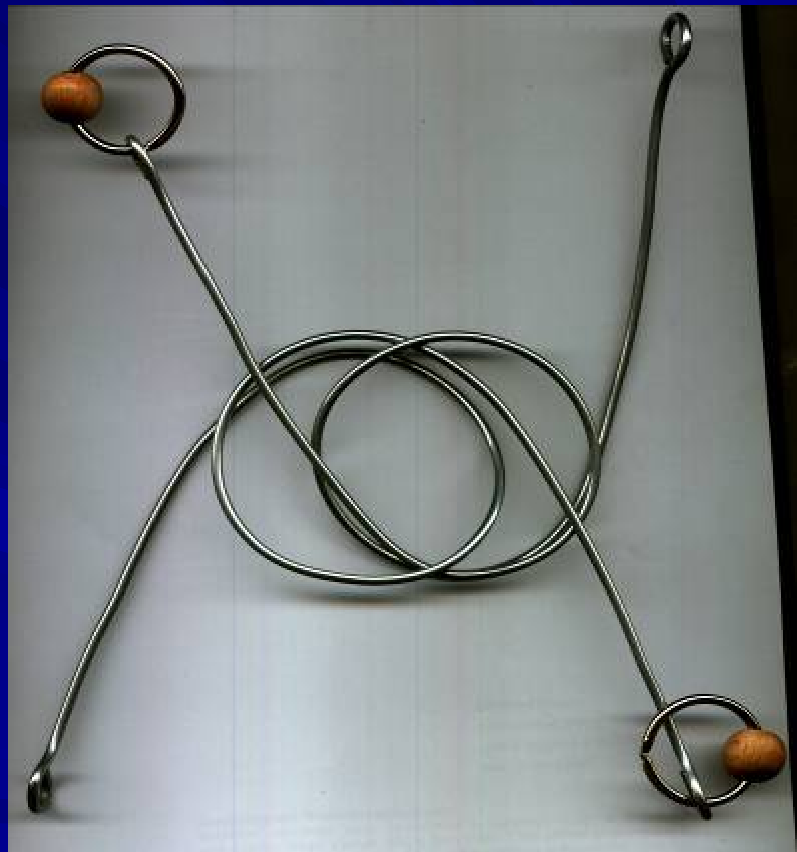
ESCAMOTEABLES 1

ESCAMOTEABLES 2

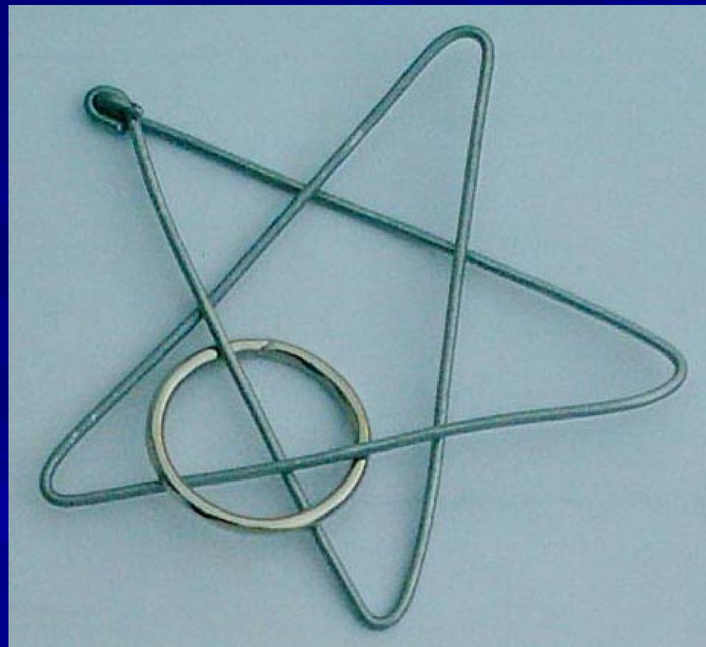
Otros:

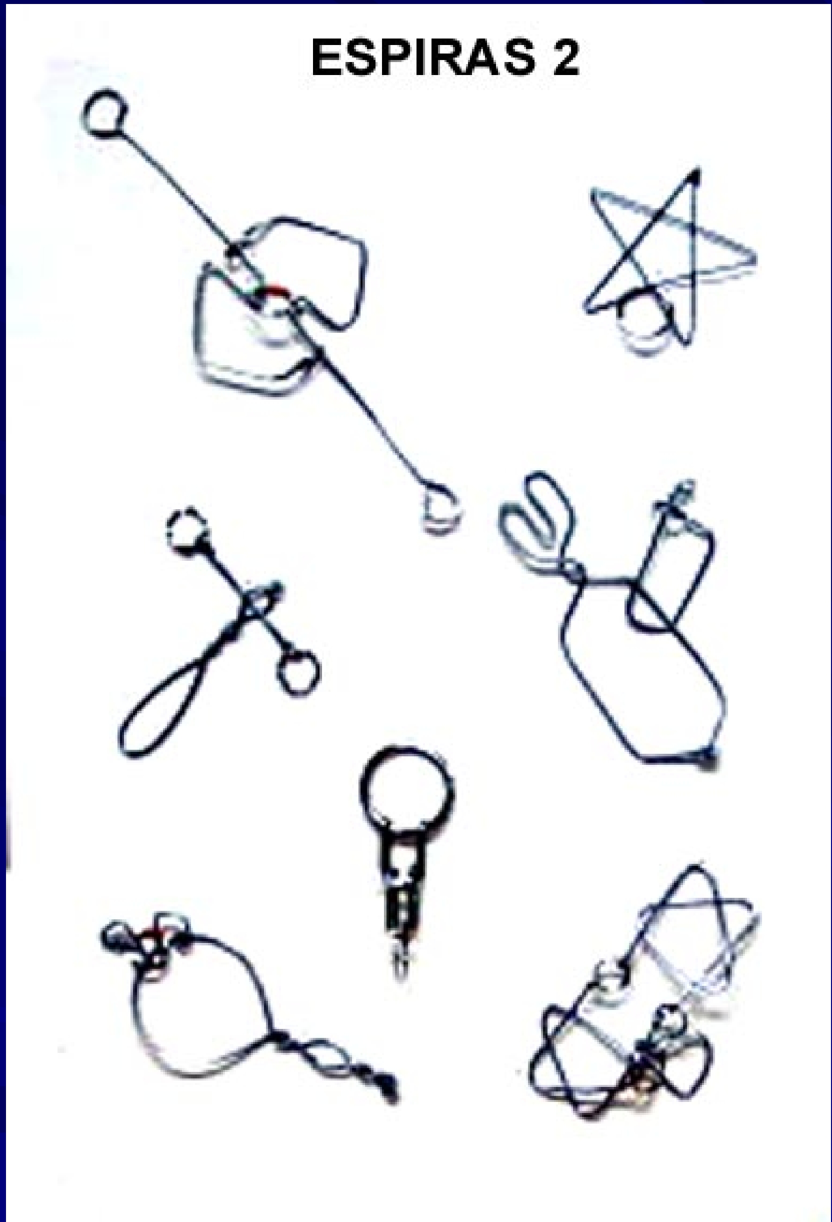
- Espiras
- Con torsión

ESPIRAS

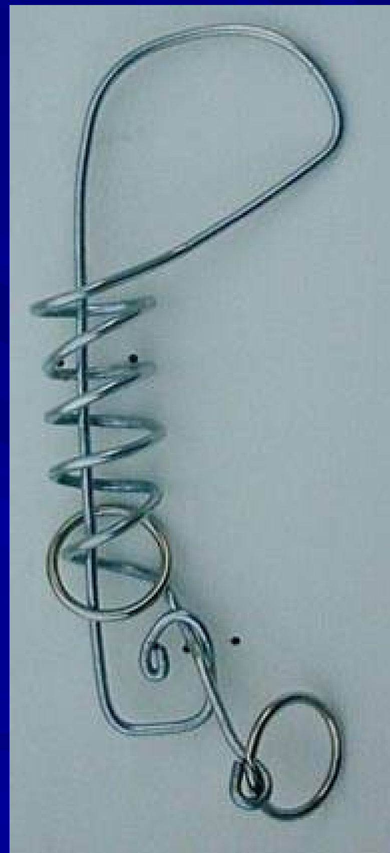


ESPIRAS 1

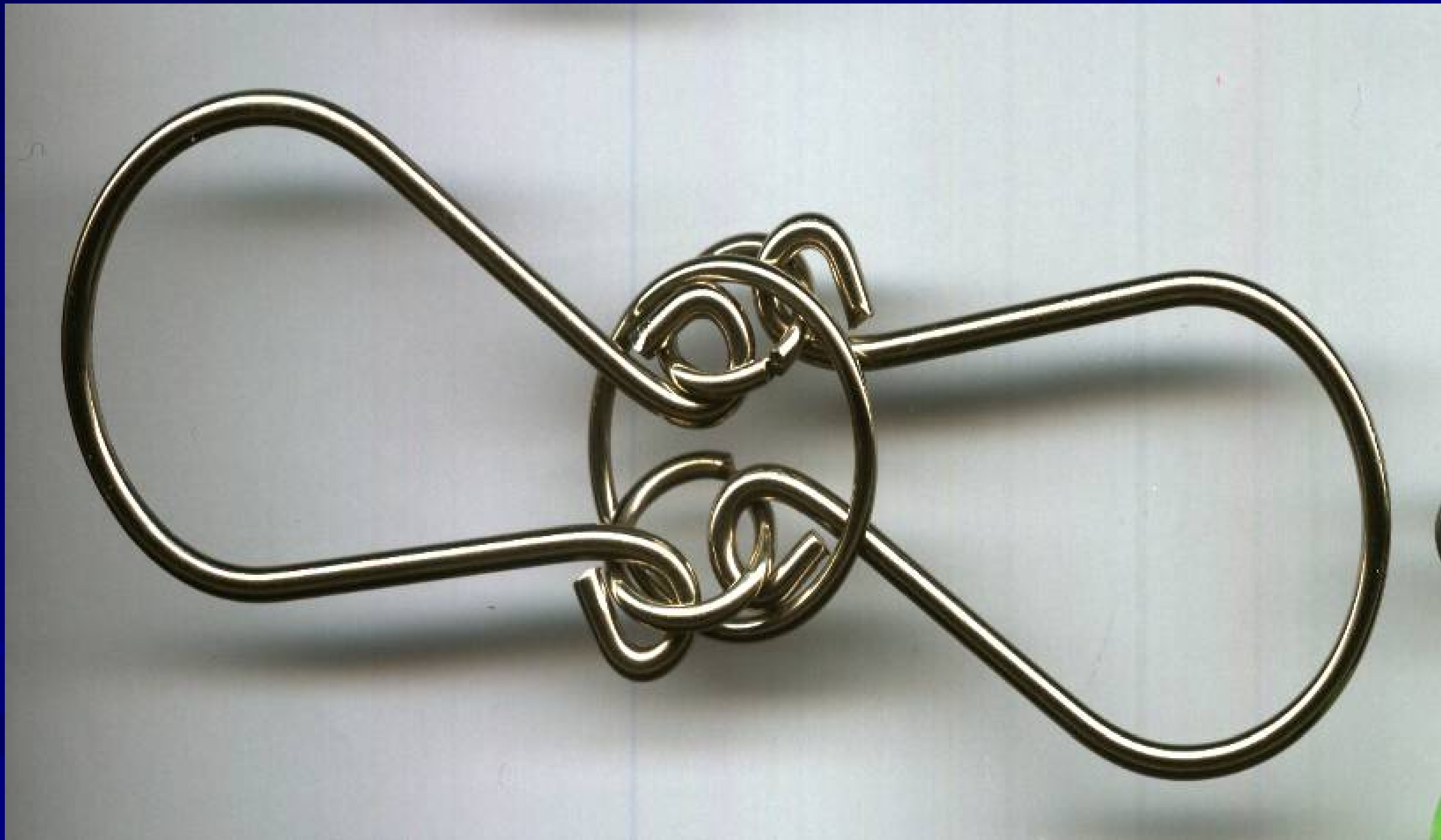




ESPIRAS 2



EL OCHO TUMBADO



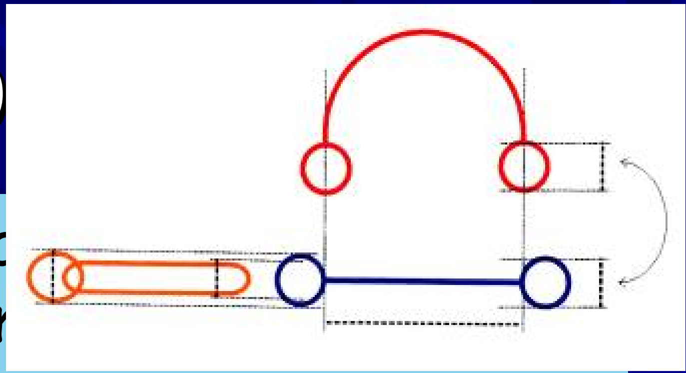
ESCAMOTEABLES CON TORSIÓN

EL OCHO

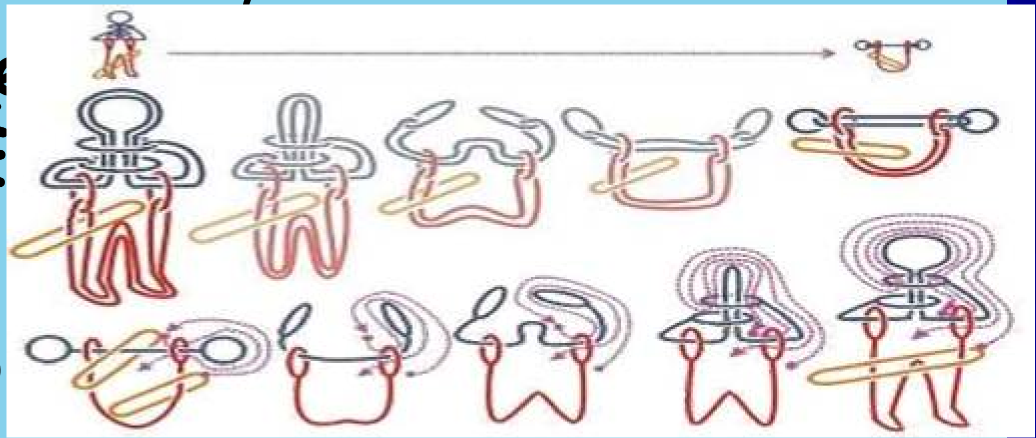
CONCLUSIONES

- Hay aspectos topológicos que ayudan a entender, resolver y clasificar puzzles de alambre, pero también hay que considerar distancias y formas
- **Puzzles de alambre = ESTRUCTURAS TOPOLÓGICO-MÉTRICAS**
- "Analizar puzzles topológicos" tiene en común con "hacer matemáticas":
  - Buscar criterios de equivalencia,
  - estudiar condiciones de solución y unicidad
  - Clasificarlos
  - variantes interesantes topológicamente,
  - etc.)

CONCLUSIO



- Hay aspectos topológicos que ayuda resolver y clasificar puzzles de alar hay que considerar distancias y formas
- **Puzzles de alambre TOPOLÓGICO-MÉ**



- "Analizar puzzles topo "hacer matemáticas":
  - Buscar criterios de equivalencia,
  - estudiar condiciones de solución y unicidad
  - Clasificarlos
  - variantes interesantes topológicamente,
  - etc.)

CONCLUSIONES

Interés educativo de Puzzles Topológicos:

- **Favorecen visualización (VISIÓN ESPACIAL, especialmente topológica)**
- **Ejercitar RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS geométricos (simplificar, buscar semejantes, estudiar posibilidades de datos, identificar incógnitas/pieza problema, partir de resuelto, etc.)**
- **Introducir en clase para:**
  - Plantear retos en momentos lúdicos
  - Promover visión espacial con ejemplos sencillos
  - Mostrar otros campos de la matemática
  - Relacionar con su representación y problemas planos de huecos

Proponer talleres: Esquema

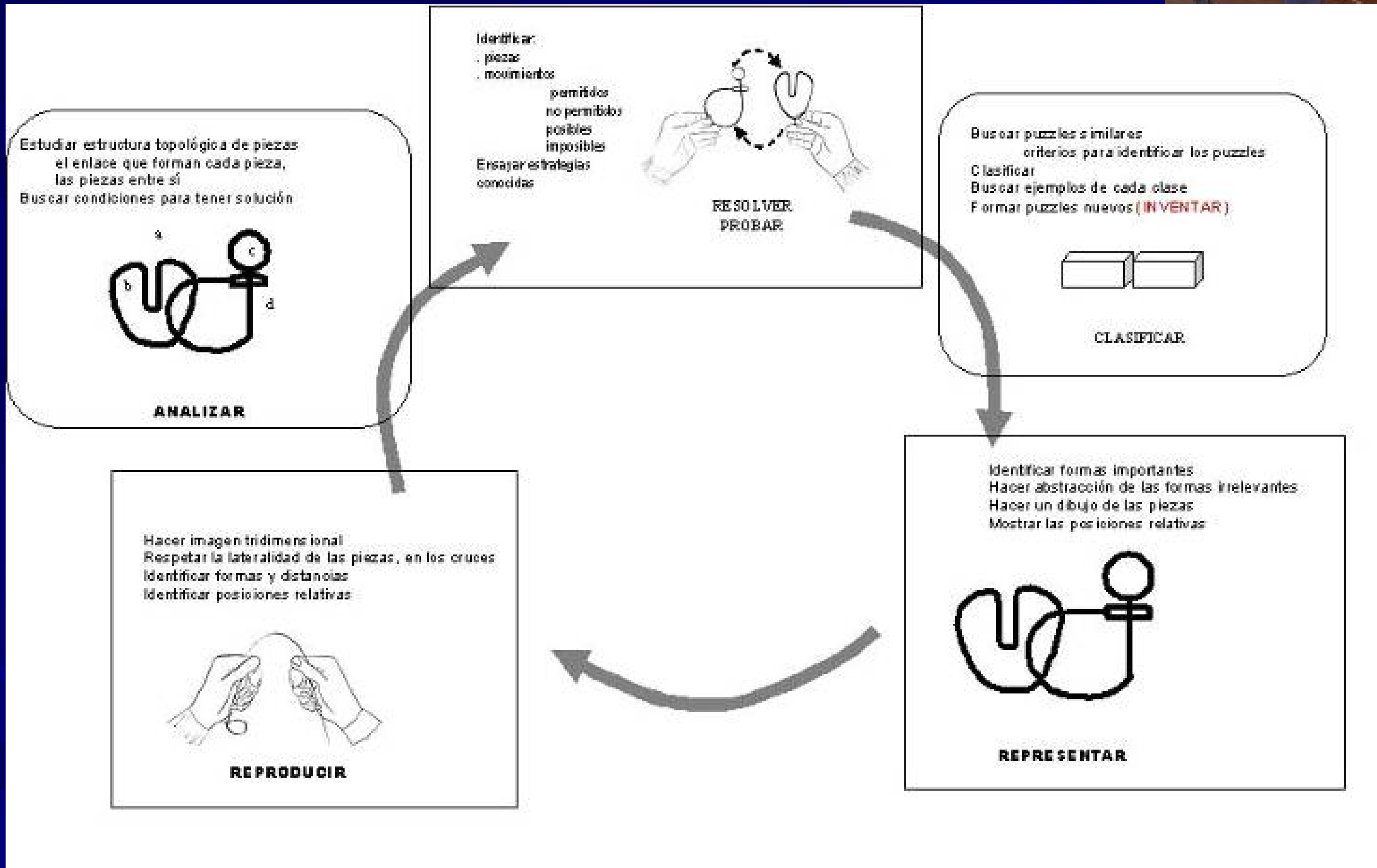


Figura 4: Ciclo de actuación con los puzzles en el taller

CONCLUSIONES

- Para trabajar con ellos:

1) Estudiar si tienen solución, (con criterios topológicos elementales)

2) Identificar sus elementos:

   .estructura base,

   . pieza problema,

   . movimientos permitidos,

   . resultado de esos movimientos, etc.

3) Identificar clase a la que pertenece

Probar, ..., tener paciencia, y ... **SUERTE**

CONCLUSIONE

abajar con ellos:

ar si tienen solución, (con

icos elementales)

ficar sus elementos:

.estructura base,

. pieza problema,

. movimientos permitidos,

. resultado de esos movimientos, etc.

3) Identificar clase a la que pertenece

Probar, …, tener paciencia, y … **SUERTE**

Muchas gracias y
… ¡QUE NO OS LIEN!!!