Resumen:
Los aficionados a los juegos de ingenio queremos convencer a los profesores de su interes matemático y educativo. Esta tarea no siempre es fácil, ya que a su prudencia natural se une la dificultad de demostrar proximidad entre Matemáticas y algunos juegos. Es el caso de los puzzles de alambre, a los que se llama puzzles topológicos, aunque la relación con la Topología no es evidente. Al considerar los puzzles de alambre como topológicos se quiere decir que para solucionarlos hay que tener en cuenta aspectos como la diferencia entre abierto y cerrado, dentro y fuera, etc. En esta comunicación justificaré un poco más esta relación, y mostraré algunas variables para clasificar los puzzles de alambre.

DE LA GEOMETRÍA DEL ELÁSTICO (TOPOLOGÍA) A LOS PUZZLES DE ALAMBRE

Pablo Flores Martínez.
Departamento de Didáctica de las Matemáticas,
Universidad de Granada.

Resumen

Los aficionados a los juegos de ingenio aprovechamos jornadas como las JAEM para enfatizarlos, tratando de convencer a los asistentes que estos juegos están muy relacionados con las Matemáticas y que tienen un gran interés educativo. Esta tarea no siempre es fácil, ya que a la natural prudencia de los profesores que nos escuchan se une a veces la dificultad de demostrar proximidad entre Matemáticas y algunos juegos. Este es el caso en los ***puzzles de alambre****, a los que se llama puzzles topológicos, pero cuya relación con la Topología no es fácil de establecer de manera clara. Y es que cuando se consideran a los puzzles de alambre como puzzles topológicos se está queriendo decir que para solucionarlos hay que tener en cuenta algunos aspectos relacionados con la diferencia entre abierto y cerrado, dentro y fuera, etc. En esta comunicación trataré de justificar un poco más esta relación, a la vez que trataré de mostrar algunas variables que se utilizan para clasificar los puzzles de alambre.*

Introducción

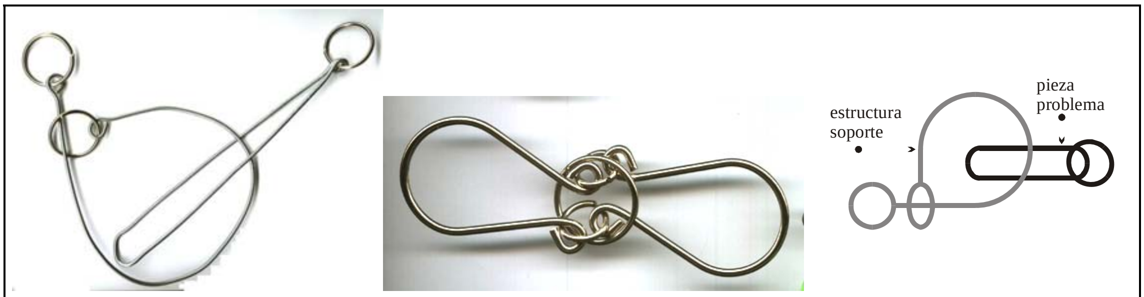
Los puzzles de alambre son juguetes muy antiguos, que evidentemente ayudan a los que los utilizan a desarrollar estrategias para resolver situaciones cotidianas relacionadas con extraer o meter objetos dentro de otros, amarrar objetos, etc. Caben dentro de lo que llamamos "juegos de ingenio", ya que su solución no es evidente, y si alguna vez lo resolvemos sin pensar no resulta fácil volverlo a la posición original. Por tanto su interés para desarrollar destrezas nadie lo niega, lo que se hace necesario es analizar los juegos para ver de qué tipo son estas destrezas. En unas jornadas como las JAEM nos interesaría saber en qué sentido colaboran a desarrollar destrezas relacionadas con la educación matemática. Eso exige que demos dos pasos: aclarar la relación que existe entre los puzzles de alambre y las Matemáticas, y analizar la riqueza educativa que tienen los juegos.

La primera parte la solemos salvar aludiendo al título de "juegos topológicos", para denotar los puzzles de alambre. Pero ¿qué queremos decir con ello? Se va haciendo necesario profundizar en la relación que existe entre la Topología y estos juegos. La otra línea de análisis se basa en descubrir las cualidades educativas de los juegos de alambre, y a ello hemos dedicado diversos trabajos (Flores 2002; Montoya y Flores 2003; Flores 2003), en los que argumentamos que los puzzles topológicos colaboran a crear visión espacial en los que los practican. Estas cualidades didácticas se verían reforzadas si pudiéramos apoyarlas en la relación conceptual con las Matemáticas. En esta comunicación nos centramos en recorrer el espacio que existe entre la Topología y los puzzles de alambre, para lo cual necesitamos focalizar la atención en la Teoría de Nudos, y posteriormente introducir nuevos aspectos no topológicos que son importantes en los puzzles de alambre. Para ello vamos a comenzar por caracterizar la Topología, posteriormente pasaremos a la Teoría de Nudos, y de ahí volcaremos sobre los puzzles de alambre, mostrando algunos problemas que existen en su universo, y algunas variables que podemos emplear para clasificar los puzzles, lo que será un paso previo a la definición de la identidad de cada puzzle.

De la Topología a la Teoría de Nudos

Desde los tratados matemáticos formales, se considera a la Topología como el estudio abstracto del concepto de *punto límite* (Hocking y Young, 1966). Muchos conceptos matemáticos están relacionados con el *límite*, como la idea de *función continua*, pero también la de ***conexión*** de una figura geométrica (en la que hay que definir la idea de "dentro de", frontera, etc.). Como nos dicen Courant y Robbins (1969), la Topología estudia las propiedades de los cuerpos que permanecen invariantes ante transformaciones topológicas[1]. Los divulgadores de la matemática nos sugieren la idea de transformación elástica (o de la goma elástica) para ejemplificar la transformación topológica (Stewart, 1998). La gráfica de una función no cambia su continuidad por medio de una deformación elástica, al igual que no cambia la conexión de una superficie ante su deformación. De ahí que se identifique a la Topología con la geometría del elástico, y se dice que trata de aquellas propiedades que permanecen inalterables cuando se deforman los cuerpos por medio de transformaciones continuas (Stewart, 1977). O, en palabras de Hogben (1966), todo lo que se pude transformar cuando no se conservan las relaciones métricas ni la forma visible. En lenguaje cotidiano traduciríamos las caracterizaciones anteriores al decir que la Topología estudia las relaciones que se mantienen cuando se deforman los cuerpos sin cortarlos ni unir trozos separados. Por tanto una de las propiedades topológicas es el número de partes de que se compone la figura, es decir, el número de regiones *conexas*[2] que la componen. Pero las regiones están delimitadas por bordes, por lo que el número de regiones está relacionado con el número de bordes de la figura. Gracias a estos elementos podemos definir lo que entendemos por figura abierta y figura cerrada. La Topología formal recurre a la caracterización de estos adjetivos con la idea de conjunto abierto y cerrado, así como las operaciones que se pueden establecer entre ellos, lo que lleva a la caracterización de lo que se entiende por un *Espacio Topológico* en Topología (Hocking y Young, 1966).

Cuando pasamos a los puzzles de alambre percibimos que hay algunos elementos topológicos que podemos aprovechar. Podemos diferenciar puzzles con una, dos o más piezas, con lo que podríamos caracterizar su grado de conexión. También podríamos analizar el "cierre" de cada figura. Parece evidente que esta última característica tiene una relación mayor con los puzzles de alambre, pues un puzzle con piezas abiertas requiere estrategias diferentes que la que tiene sus piezas cerradas. (Figura 1)



Puzzle A **Figura 1** Puzzle B (El Ocho tumbado)

---

[1] O transformaciones continuas, esto es correspondencias biunívocas y bicontinuas, es decir, que si tenemos dos puntos P y Q y sus transformados, y hacemos que la distancia entre P y Q tienda a cero, también tiene que tender la distancia entre sus transformados.

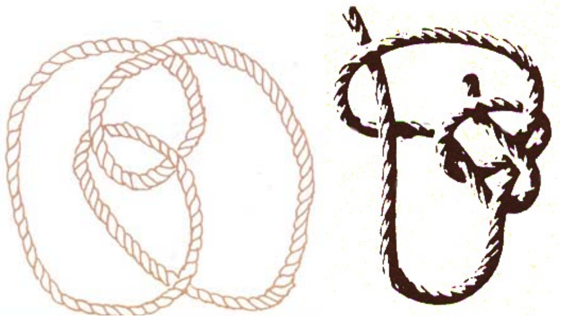
[2] Regiones en las que dos puntos cualesquiera se pueden unir por curvas contenidas completamente en ellas.

Como se ve en la figura 1, el puzzle A tiene partes abiertas y partes cerradas. Sin embargo el puzzle B tiene todas sus partes cerradas. Si ambos puzzles tienen solución es debido a que las piezas que hay que extraer (que en ambos casos son cerradas), están enlazadas de diferente forma. Mientras en el A parte de la *estructura soporte* (Montoya y Flores 2003; Flores, 2003) atraviesa a la pieza a extraer (*pieza problema*), en la figura B la pieza problema abraza a la estructura base, sin estar atravesada por ella.

Como vemos, las condiciones de cierre nos llevan a fijarnos en otras características, tales como el estar dentro o fuera. Estas características no son ajenas a la Topología, sino que han sido objeto de atención de la Teoría de Nudos, con la que la relación de los puzzles de alambre es mayor.

La Teoría de Nudos

Surgida en el siglo XX, la Teoría de Nudos es una parte de la Topología que estudia las curvas unidimensionales trazadas en el espacio de dimensión tres, de forma que se inicien y terminen en un mismo punto y no se corten a sí mismas (Neuwirth 1979). Como vemos, la idea matemática de nudo no coincide exactamente con la idea cotidiana, ya que nuestros nudos no tienen los extremos unidos. Esta es una cualidad establecida por los matemáticos para poder llevar a cabo su estudio, ya que si el nudo está abierto se puede aplicar una transformación topológica y convertirlo en una cuerda no anudada (Figura 2).



Nudo matemático Nudo de Balso

Figura 2:

Cuando emprendemos el estudio topológico de los puzzles de alambre surge el mismo problema, si nos valemos de las transformaciones topológicas para estudiar los puzzles de alambre nos vamos a encontrar que los puzzles abiertos, como el A de la figura 1 son triviales. Igualmente serían triviales todos los puzzles de clavos (Flores, 2002). Por tanto hemos de admitir que si bien la Topología es necesaria para estudiar los puzzles de alambre, no es suficiente.

Volviendo a los nudos, Iam Sewart (1998) los define como superficies formadas por una figura continua que se enlaza a si misma o a otras superficies continuas. Con ello la *Teoría de Nudos* se encarga de determinar si un nudo está realmente anudado[3], a determinar que nudos son equivalentes al aplicarle la transformación y a clasificar los nudos. Para resolver estos tres problemas se buscan variables que permanezcan invaritantes a las transformaciones topológicas, lo que ha generado nuevos conceptos específicos, como los polinomios asociados a los nudos.

Intuitivamente para clasificar los nudos se han comenzado por estudiar las intersecciones, la forma y el número de cruces, si los bucles están enlazados, la simetría, etc. Pero observamos que estas propiedades no quedan caracterizadas por el grado de conexión, por lo que focalizan la atención sobre otras propiedades de las figuras, lo que

[3] Es decir, si no se desata al aplicarle una transformación topológica

da lugar a una teoría propia, sumergida en la Topología (Cormwell, 2004). En efecto, no podemos determinar interior y exterior, ya que las curvas que los forman tienen dimensión 1. Un intento de estudiar los nudos por medio de la Topología clásica fue recurrir a envolver los nudos por superficies sólidas que los contengan, y estudiar las características de esas superficies debidas exclusivamente a los nudos. Estas regiones tienen interior y exterior, borde, etc., por lo que se prestan al estudio topológico clásico, pero tal como muestra Iam Stewart (1994), hay nudos diferentes que producen una misma superficie complementaria, por lo que se recurrió a otras herramientas que generó una rama de la Topología con cierta autonomía. Nosotros creemos que para el estudio de los Puzzles de alambre tenemos que introducir también otros elementos a los meramente topológicos o de nudos, al añadir cualidades diferentes.

De los Nudos a los puzzles de alambre

Al partir de la Teoría de Nudos para estudiar los puzzles de alambre nos encontramos con que así como los nudos matemáticos son cerrados, con los puzzles no ocurre lo mismo. Pero además algunas partes de las piezas se cortan entre sí, con lo que no pueden considerarse nudos. En Latinoamérica, dos compañeros, Montoya y Gómez-Alcalá (2001) hicieron un trabajo en el que transformaron los puzzles en *enlaces matemáticos*, con objeto de poder aplicar algunos resultados de la Teoría de Nudos a los puzzles. En la figura 3 se observa cómo queda transformado en enlace un puzzle similar al A de la figura 1.

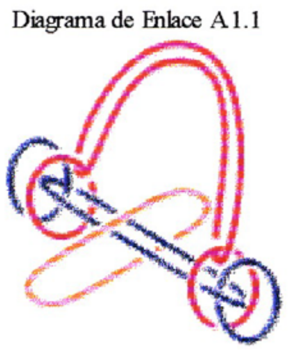
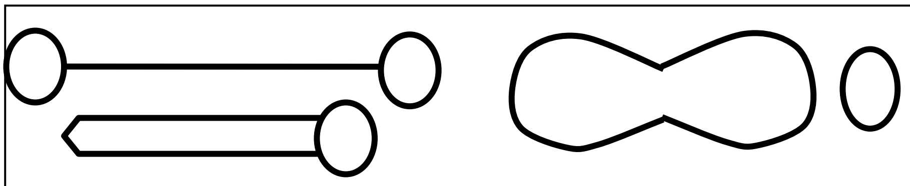


Figura 3: Puzzle transformado en enlace

Este trabajo les suministró un resultado importante, una condición necesaria para que un puzzle de alambre tenga solución. *Un rompecabezas de alambre tiene solución si uno de sus invariantes topológicos consiste en que el nudo problema establezca un enlace trivial con el resto de los nudos. Es decir si el enlace que representa el juego en el inicio puede llevarse mediante transformaciones continuas al enlace que representa el juego resuelto*. (Montoya y Gómez-Alcalá, 2001).

Intuitivamente traduciríamos que un puzzle de alambre sólo tiene solución sí al convertir el alambre en cuerda elástica (que permite transformaciones elásticas), se puede extraer la pieza problema de la estructura soporte, bien por que esta estructura se convierta en un nudo trivial, bien por que se pueden soltar. En la figura 4 vemos como los dos puzzles de la figura 1 quedan al transformarlos en puzzles de cuerda elástica, el A convertido en una pieza abierta terminada en dos argollas y el otro en dos piezas que se separan sin problemas.


Puzzle A de cuerda elástica Puzzle B de cuerda elástica
Figura 4

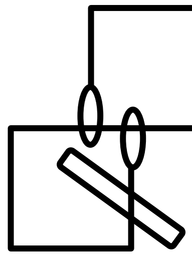


Figura 5: Puzzle imposible

Esta condición les permitió demostrar que un puzzle de alambre clásico como el de la figura 5 no tiene solución, pese a que aparece en muchas colecciones y se oferta como “imposible”[4]. Este puzzle ha sido objeto de estudio en Matemáticas (Coffin, s.f.)

También los puzzles de alambre se plantean problemas similares a la Teoría de Nudos. Un problema muy importante de los coleccionistas de puzzles es señalar las diferencias entre ellos. ¿Qué tiene que cambiar para que lo consideremos diferente? ¿Son diferentes dos formas como las de la figura 6?:

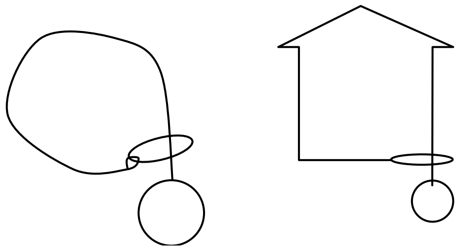


Figura 6: Puzzles tipo A (fig. 1)

Si bien se ha hecho un gran esfuerzo en clasificar los puzzles, a lo máximo que se ha llegado es a establecer variables generales y a incluir los puzzles de alambre en el tipo *tnaglement puzzles* (puzzles de enredo, Dalguety & Horden, s.f.), o a diferenciar los puzzles de alambre de los puzzles de metal. Para clasificar los puzzles de alambre tenemos que afinar más, para lo que necesitamos elementos que nos permitan establecer equivalencias entre los puzzles. Para ello podemos recurrir a diferenciar a) elementos topológicos que repercutan en la forma de resolver los puzzles, b) elementos geométricos (forma y medida) o c) otros elementos que disimulen la estructura. Entre los elementos topológicos hemos comenzado a distinguir si las piezas están *abiertas* o *cerradas*, si su posición relativa es estar *dentro o fuera* de la estructura, el *número de agujeros* o partes de cada pieza, si las piezas *se abrazan o se enlazan*, si las piezas están *atrapadas o permiten deslizarse*, son *simples o con ramificaciones*, etc. Ente los elementos geométricos se encuentran aspectos ligados a la *forma*, a las características de la forma en los *puntos críticos* (en los que se encuentran las piezas que cierran la estructura, como el que en ellos se produzca una inflexión, por ejemplo), a la *rigidez y movilidad* general, etc. Entre los otros encontramos aspectos que van desde el tamaño respectivo de las piezas, el número de pasos, los materiales y su aspecto, etc. En la figura 7 podemos ver algunas de estas diferenciaciones, que nos permiten caracterizar cada puzzles. Gracias a ello podemos emprender una primera clasificación, recurriendo a criterios cruzados para establecer clases.

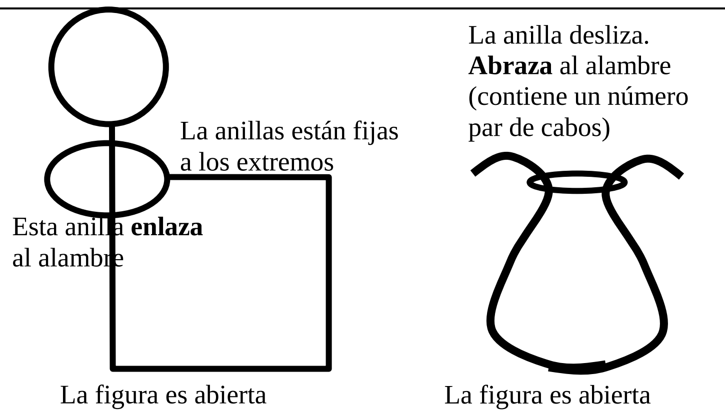


Figura 7

---

[4] En las colecciones se suele indicar la dificultad de los puzzles, pero se emplean términos chocantes, por lo que “imposible” puede significar “un reto para expertos”, cuando en realidad aquí quiere decir “sin solución”.

A partir de estas observaciones he realizado una primera clasificación de los puzzles que ya he reflejado en diversas publicaciones, y que tiene un fundamento principalmente topológico, gracias a lo que puedo decir algunas características de los puzzles de cada clase:
A) Puzzles Meter-salvar. La estructura soporte suele ser abierta, aunque una parte que puede ser cerrada traba al menos uno de los extremos, lo que deja a la pieza problema (que incluso puede ser cerrada[5]) enlazada en la estructura soporte.
B) Puzzles Escamoteables. La estructura soporte suele ser cerrada, y la pieza problema la abraza. Para resolverlos hay que escamotear una parte de la estructura con el resto.
C) Clavos. Se componen de dos piezas que suelen ser iguales o simétricas, ambas abiertas, por lo que la traba se establece por que el grosor de las piezas es superior el tamaño del hueco que forma cada pieza para evitar la salida de la otra.

Esta supone una clasificación básica, que luego puede ramificarse, estableciendo subclases, ya que el tipo A es muy amplio y permite variaciones complicando el sistema (por medio de piezas que requieren la realización de muchos pasos), o cerrando aparentemente la estructura soporte, lo que obliga a flexibilizar la pieza problema, convirtiéndola en cuerda, por ejemplo. Igualmente los escamoteables pueden diferenciarse por otros aspectos, como el emplear espiras, lo que añade a las restricciones topológicas las ligadas al sentido de giro de las espiras, que requiere una coincidencia para su posibilidad de escamoteo. Por último hay que reconocer que la creatividad de los autores de estos puzzles les ha llevado a proponer modelos mixtos, en los que se combinan las dificultades debidas a unos y otros puzzles.

Conclusiones

Este breve análisis ha pretendido justificar que tiene sentido llamar puzzles topológicos a los puzzles de alambre, pues para tener solución necesita que las piezas verifiquen unas condiciones topológicas determinadas (Montoya y Gómez-Alcalá, 2001). Pero además por que jugar y ejercitarse con ellos hace percibir cualidades topológicas (estar abierto cerrado, enlazar, abrazar, etc.) (Flores 2003). Ahora bien, puede resultar abusivo si se presta a confundir la Topología con los puzzles, en los que existen cualidades métricas y rígidas que no corresponden a estos puzzles.

Hemos visto que el estudio de los juegos se enriquece con la Topología, pues ella nos permite establecer algunas condiciones de solución, nos suministra algunas variables para diferenciar el tipo, así el número de cabos que atraviesan una pieza nos permiten distinguir si la pieza abraza o enlaza. Si el número de cabos que atraviesa el interior es par, la pieza abraza a la otra (puzzle B de la figura 1), mientras que si es impar está enlazada (puzzle A de la figura 1), con lo que estamos aplicando propiedades similares a las ligadas a curvas de Jordan, para determinar si dos puntos están en la misma o distinta región.

Por tanto es pertinente aportar puzzles de alambre a actividades de divulgación matemática, así como proponer a nuestros alumnos que los practiquen, ya que el jugar con ellos desarrolla el dominio de algunas características topológicas de los cuerpos (tanto de los puzzles como de otras situaciones cotidianas). Ahora bien, conviene

[5] El que la pieza sea abierta no es una condición necesaria para que el puzzle tenga solución, por lo que, como en Matemáticas, establecemos la condición mínima. Sin embargo para los jugadores poco versados esta diferencia puede ser importante.

completar estos trabajos lúdicos con lecturas de divulgación matemática sobre lo que es la Topología y la relación que tiene con los puzzles, para lo que insto a los divulgadores a que dediquen un esfuerzo para hacer más transparente la implicación de la Topología en la vida cotidiana, en general, y en los puzzles de alambre, cuerdas y maderas, en particular.

Referencias bibliográficas.

Coffin, S. (s.f.). The Odyssey of the Fugure Eight Puzzle. En Berlekamo, E. & Rodgers, T. (Eds.). *The Magician and the Pied Puzzler*, http://www.g4g4.com/contentsmmpp. 103-105.

Courant, R. y Robbins, H. (1969). Topología. En Newman, J.R. (Ed.), *Sigma. El mundo de las Matemáticas*. Barcelona, Grijalbo, pp. 173-191.

Cromwell, P. (2004). *Konts and links*. Cambridge, Univesity Press.

Dalgety, J. & Hordern, E. (s.f.). Classification of Mechanical Puzzles and Physical Objets Related to Puzzles. En Berlekamo, E. & Rodgers, T. (Eds.). *The Magician and the Pied Puzzler*, http://www.g4g4.com/contentsmmpp. 175-186.

Flores, P. (2003). Forma i mesura. Les puzzles topologics. *Perspectiva Escolar*, Maig 2003, 17-24.

Flores, P. (2002). Laberintos con alambre. Estructuras topológico-métricas. SUMA 41, 29-35.

Hocking, J.G., Young, G.S. (1966). *Topología*, Barcelona, Reverté.

Hogben, L. (1966). *El universo de los números*. Barcelona, Destino.

Montoya, C. y Gómez-Alcalá, G., (2001). Una aproximación matemática a los rompecabezas de alambre. *RELME 15*.
http://webs.sinectis.com.ar/ccrespo/comunica.htm

Montoya, C. y Flores, P. (2003). Los puzzles en alambre como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 6.3, pp. 665-684.

Neurwirth, L. (1979). Teoría de Nudos. *Investigación y Ciencia*, agosto 1979, pp. 52-66.

Stewart, I. (1977). *Conceptos de matemática moderna*. Madrid, Alianza Universidad.

Stewart, I. (1998). *De aquí al* infinito. Barcelona, Destino.

Stewart, I. (1994). Nudos, cadenas y cintas de vídeo. *Investigación y Ciencia*, marzo, 1994. pp. 86-89.