FORMA Y MEDIDA: PUZZLES TOPOLÓGICOS

Pablo Flores Martínez

1. introducción

Una de las habilidades que deben desarrollarse con la educación matemática durante la enseñanza obligatoria es la *visión espacial*. Como el "buen oído", la "habilidad para dibujar bien", el "buen gusto", etc., la visión espacial es una cualidad que se valora poco en la escuela. Se envidia a quien lo tiene, pero cuando alguien hace alguna chapuza (se pierde en una ciudad, por ejemplo), se utiliza como achaque: "*es que yo no tengo visión espacial*".

Este tipo de habilidades son especialmente difíciles de trabajar en la enseñanza, ya que no han sido realzadas en la formación del profesor, y la comunidad educativa las suele identificar con disposiciones innatas, por lo que el maestro, los padres y los alumnos no suelen considerarla como básicas. Por tanto no parecen evaluables, y los alumnos son reacios a realizar actividades en el aula para ejercitarla.

En un mundo en el que se habla de diversidad, de riqueza cultural, de importancia de los diferentes talentos (Gardner, 1995), no podemos dejar de ayudar a desarrollar la visión espacial de nuestros alumnos, ya que esta cualidad facilita la adaptación a la vida, especialmente en una sociedad dominada por la imagen, que emplea cada vez más de la representación gráfica y la percepción tridimensional, con mensajes que hay que interpretar.

En este artículo proponemos que se trabaje en el aula la percepción espacial (que va más allá de la visión espacial, tal como indican Alsina y otros, 1987), utilizando elementos apropiados para que el niño la desarrolle y ejercite. Para ello los docentes tenemos que salvar las reticencias de los alumnos, proponiéndoles situaciones que sean atractivas. Sugerimos emplear como material manipulativo los *puzzles topológicos*, ya que con ellos podemos crear unas condiciones lúdicas, en las que se plantea un reto manipulativo al alumno. Para resolverlo tendrá que poner en juego y desarrollar su percepción espacial.

Los puzzles topológicos pueden afrontarse como pasatiempos, pero también pueden constituir verdaderas tareas educativas, si se crean las condiciones para que los alumnos pasen del tanteo libre a la representación, a la captación de sus cualidades geométricas y la interiorización de sus estructuras.

2. Los puzzles topológicos

Con este nombre conocemos a aquellos juguetes, como el de la figura 1, que utilizan aspectos topológicos y geométricos para hacer difícil separar una pieza (*pieza problema*) de una estructura aparentemente cerrada, en la que parece imposible realizar ningún tipo de variación.

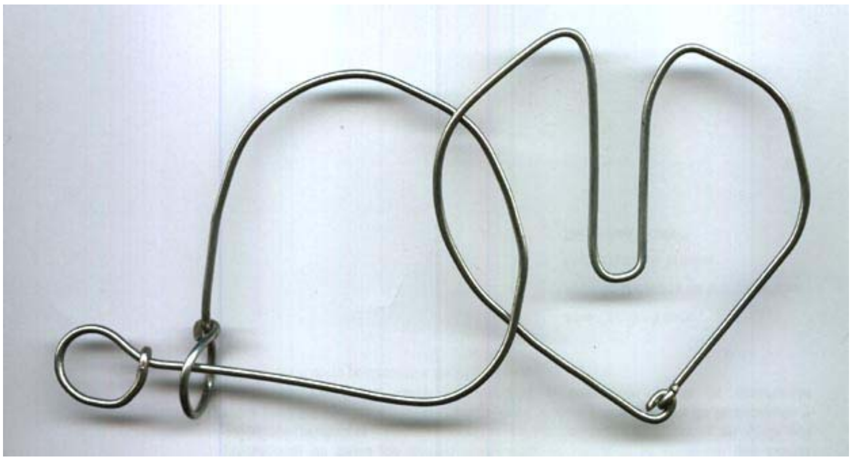

Figura 1: PUZZLE TOPOLÓGICO EN ALAMBRE

Los puzzles topológicos básicos están formados por una estructura compuesta por dos o más piezas de alambre, madera o cuerda. De este conjunto de piezas entrelazadas, el jugador debe separar una de ellas –la *pieza problema*– del resto del conjunto –la *estructura soporte*– haciendo sólo las deformaciones que permita el material del que está hecho, sin emplear la fuerza. En la figura 1 podemos ver un ejemplo muy conocido de estos puzzles, hecho de alambre. La estructura soporte de este puzzle consiste en un lazo de alambre, culminado en un extremo con un aro, que a su vez abraza al otro extremo, el cual también termina en otro aro.

A primera vista los **puzzles topológicos** parecen imposibles, pero muchos de ellos tienen solución, y para encontrarla hay que buscar el camino de salida que debe recorrer la *pieza problema* a lo largo de la estructura. En el puzzle de la figura 1 hay que aprovechar la anchura de una parte de la pieza problema para hacerla pasar a través del aro que cierra la estructura base y sortear el otro aro.

Generalmente el jugador procede a probar, buscando los movimientos que el puzzle permite. Ello le lleva a tomar conciencia de algunas cualidades espaciales en las que no había reparado (*si está abierto o cerrado, las dimensiones que permiten pasar a través de alguna parte, etc*.). En muchas ocasiones estos intentos pueden llevar a encontrar una solución inadvertida, sin comprender cómo se llegó a ella y sin saber cómo volver a la situación inicial. Nuestra propuesta es que el docente aproveche estas circunstancias para proponer al alumno que estudie cuáles son las condiciones del puzzle que han permitido su resolución, con lo que percibirá la importancia de las relaciones espaciales trabajadas.

3. Caracterización topológica y métrica de los puzzles topológicos

Si analizamos la *estructura base* (**d**) del puzzle de la figura 1 observamos que no está cerrada. Tiene una abertura que traba un extremo, quien, al terminar en un aro al menos del mismo tamaño que el anterior, no puede pasar través de esa abertura. La *pieza problema* tiene apariencia de corazón (**x**), pero con su parte central alargada y estrecha. Para su solución hay que aprovechar que la parte central del corazón pasa a través del aro de la estructura base.

Es muy importante llegar a distinguir las estructuras base y las piezas problema. Ello permite estudiar la equivalencia de puzzles, identificar sus características, y anticipar soluciones de nuevos puzzles. Todo esto facilita su resolución y contribuye a desarrollar la visión espacial. Se puede ver que distintas estructuras base (figura 2) se pueden combinar con distintas piezas problema (figura 3), generando otros puzzles; lo que permite incluso, inventar nuevos puzzles.

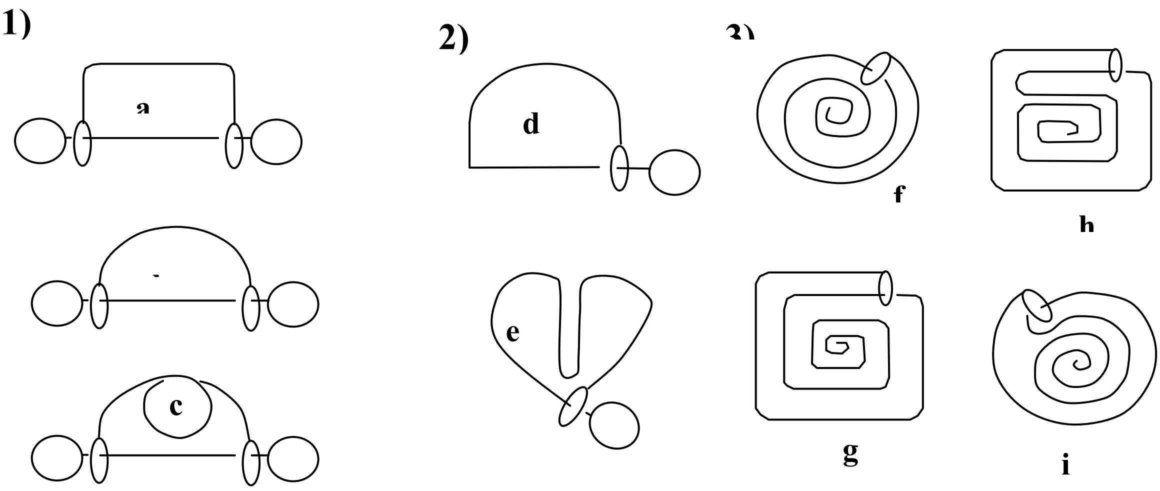

Figura 2: estructuras base

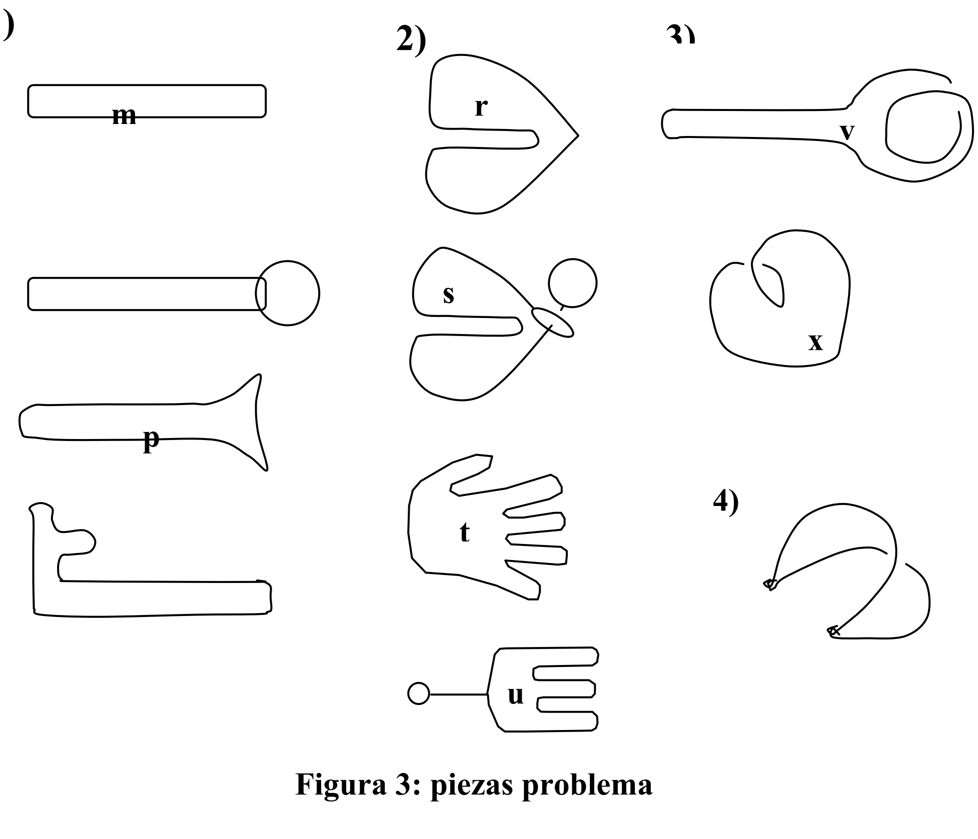

Figura 3: piezas problema

Si observamos las *estructuras base* de la figura 2, veremos que hay coincidencias entre ellas. Unas se pueden obtener haciendo pequeños cambios a las otras. Una primera diferencia consiste en que unas se componen de dos piezas (1), y otras de una (2 y 3). Esto genera que unas tengan <u>dos</u> aberturas (1) y las otras sólo <u>una</u> (2 y 3). Las de una pieza (2 y 3) se diferencian por la dirección del extremo abrazado. En los espirales (3), el extremo se dirige hacia dentro de la anilla, mientras que en los otros (2) se dirige hacia fuera. También se diferencian en la forma, aunque en este caso es menos importante. Por tanto las diferencias se basan en cualidades topológicas básicas: número de aberturas, direcciones de desplazamiento, dentro / fuera, etc.

Las *piezas problema* se diferencian fundamentalmente por la forma. Podemos observar que en todas aparece una forma estrecha y alargada (en la **y** esa forma alargada se logra plegando las dos piezas). La anchura de esta parte estrecha tiene que permitir pasar a través del aro que abraza de la estructura base. Su longitud permite rodear el aro del extremo abrazado.

Podemos distinguir la pieza **a** de las otras. Esta primera pasa entera a través de la anilla. Todas las demás pueden introducir una parte, pero no caben enteras. Las piezas 3) añaden una espira, complicando el puzzle. Las características señaladas dan lugar a que los puzzles topológicos tengan diferente dificultad, siendo más sencillo el que tiene menos trabas (**a**).

Observamos, pues, que los puzzles topológicos ofrecen la oportunidad de trabajar con cualidades topológicas y geométricas, pero ¿cómo podemos utilizarlos en el aula?

3. Propuesta de aula: el taller de puzzles topológicos

Inspirados en el modelo del taller realizado por Carlos Montoya en Argentina (Montoya y Gómez, 2002, Montoya y Flores, En prensa), nosotros proponemos introducir los puzzles topológicos en el aula en forma de taller (Flores, 2003), que tenga las siguientes etapas: *Prueba y resolución*, *Dibujo de los puzzles*, *Reproducción* con alambre moldeable con la mano, y, si es posible, *Análisis y Clasificación* (Figura 4), siguiendo un modelo similar al que proponen Alsina y otros (1987), para la que el alumno se relacione con el espacio.

La primera etapa consiste en el ***juego libre***, en la que los niños se familiarizan con los puzzle, *prueban*, ensayan movimientos y estrategias, buscan los movimientos posibles, llegando a establecer las limitaciones que tiene el material (movimientos no permitidos). En esta fase se va interiorizando la forma y la medida de las piezas, y detectando situaciones equivalentes.

Decimos que se ha resuelto el puzzle cuando se puede volver a colocar la pieza problema en

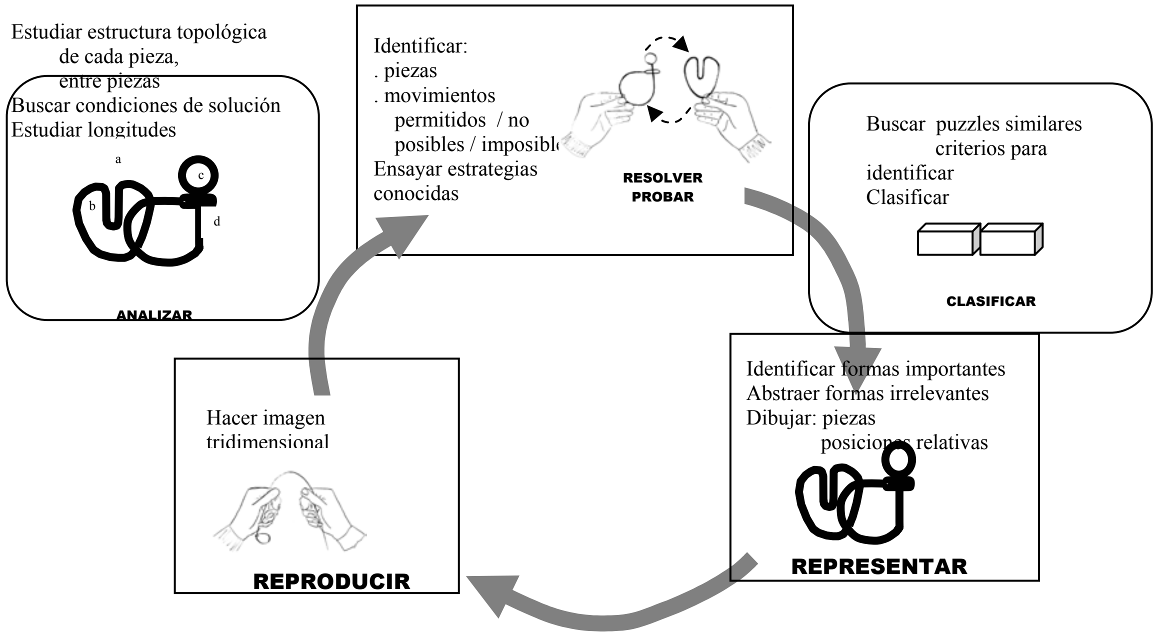

Figura 4: Ciclo de actuación

la posición original. Durante este proceso se habrán captado las circunstancias que dificultan la solución, las que facilitarían una solución trivial (pieza 1a). Gracias a ello se puede hacer una *descripción* del puzzle y una primera *explicación* de la estrategia de solución.

La primera etapa consiste en el ***juego libre***, en la que los niños se familiarizan con los puzzle, *prueban*, ensayan movimientos y estrategias, buscan los movimientos posibles, llegando a establecer las limitaciones que tiene el material (movimientos no permitidos). En esta fase se va interiorizando la forma y la medida de las piezas, y detectando situaciones equivalentes.

Decimos que se ha resuelto el puzzle cuando se puede volver a colocar la pieza problema en la posición original. Durante este proceso se habrán captado las circunstancias que dificultan la solución, las que facilitarían una solución trivial (pieza 1a). Gracias a ello se puede hacer una *descripción* del puzzle y una primera *explicación* de la estrategia de solución.

Aunque no se llegue a resolver, proponemos que los alumnos hagan una *representación* del puzzle, por medio del dibujo. Ello obliga a prescindir de los elementos accesorios y quedarse con los importantes. Para poder hacer el dibujo hay que crear códigos de representación tridimensional que permitan identificar los solapamientos y cruces.

La *reproducción*, o representación tridimensional, completa la percepción de las características de las piezas, atendiendo a los elementos primordiales.

Si se profundiza en esta etapa se puede relacionar el puzzle con alguna estructura topológica y métrica conocida, y, aplicando matemáticas intuitivas tratar de buscar condiciones de existencia de solución (*análisis*), lo que inicia en el razonamiento topológico y métrico. Gracias a ello se pueden *clasificar* los puzzles atendiendo a diversos criterios (Flores, 2002).

5. Reflexiones finales

Hemos querido mostrar que los puzzles topológicos son materiales interesantes para que el docente trabaje la visión espacial de sus alumnos, ya que:

- Son esencialmente juegos que varían en aspectos topológicos y geométricos, que hay que tomar en consideración para solucionarlos, para buscar equivalencias, etc.
- Despiertan la curiosidad de los alumnos, lo que los hace propensos a explorar con ellos
- Al explorar los puzzles de alambre se experimenta con situaciones tridimensionales, mediante problemas en los que adquiere sentido el desarrollar el sentido espacial.
- Es viable emplear puzzles topológicos en clase, diseñando tareas adecuadas, en las que la resolución no se reduzca a un juego de ensayo y error.

Referencias bibliográficas

ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Madrid, Síntesis.

FLORES, P. (2003). Taller de puzzles en alambre. En Cardeñoso J.M. y otros (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*. Granada, Dpto. Didáctica de la Matemática y SAEM THALES, pp.

FLORES, P. (2002). Laberintos con alambre. Estructuras topológico – métricas. *SUMA*.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1991). Educación Primaria. Matemáticas. En Real Decreto 1344/1991 de 6 de Diciembre. *BOE 220*, suplemento 31-35.

MONTOYA, C. y FLORES, P. (En Prensa). Puzzles en alambre como recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas. *Épsilon.*

MONTOYA, C. y GÓMEZ, G. (2002). Una aproximación matemática a los rompecabezas de alambre**.** En PARRA, C. y SAIZ, I. (Comps.): *Didáctica de las Matemáticas***.** *Aportes y reflexiones***.** Paidós Educador. Buenos Aires.