Sesión de Problemas de Matemáticas
Granada, 13 de Febrero de 2009

P1. *Calcular el valor de la suma*

$$\frac{5}{5+25^{1/2009}}+\frac{5}{5+25^{2/2009}}+\ldots+\frac{5}{5+25^{2008/2009}}$$

P2. *Determinar qué condición han de cumplir las longitudes de los lados de un triángulo para que la recta que une el baricentro y el incentro sea paralela a uno de los lados.*

P3. *Para cada número natural n, consideremos a_n el número cuya expresión decimal está formada por n sietes (por ejemplo, $a_1 = 7$, $a_2 = 77$, $a_3 = 777$, etc,...). Hallar el valor de la suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.*

P4. *Tenemos cien números en progresión aritmética de los cuales sabemos que su suma es -1 y que la suma de los términos pares es 1. Calcular la suma de los cuadrados de los cien números.*

P5. *Sea ABC un triángulo y M el punto medio del lado BC. Si r_1 y r_2 son los inradios de los triángulos ABM y ACM respectivamente, demostrar que $r_1 < 2r_2$.*

P6. *Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.*

P7. *Demostrar que al trazar las medianas de un triángulo cualquiera, éste queda dividido en seis triangulos que tienen la misma área.*

P8. *En cada una de las casillas de una cuadrícula 3x7 se coloca una ficha azul o una ficha roja. Demostrar que siempre podemos encontrar un rectángulo cuyos vértices son cuatro fichas del mismo color.*

P9. *Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.*

P10. *Sea ABC un triángulo equilátero y sean M y N puntos de AB y AC respectivamente tales que el segmento MN es tangente a la circunferencia inscrita* *de ABC. Demostrar que*

$$\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$$

P11. *Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y sean a y b números enteros distintos. Demostrar que $p(b) - p(a)$ es divisible por $b - a$.*

Utilizar este problema para demostrar las siguientes afirmaciones:

- *No existe ningún polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros tal que $p(3) = 8$ y $p(6) = 24$.*
- *Existen infinitos números de la forma $2^n - 1$ divisibles por 127.*

P12. *Demostrar que cualquier polígono convexo de área 1 está contenido en un rectángulo de área menor o igual que 2.*

P13. *Sea ABC un triángulo. Hallar todos los puntos P interiores al triángulo que cumplen las siguientes tres desigualdades:*

$$\measuredangle APB \leq 2\measuredangle ACB, \qquad \measuredangle BPC \leq 2\measuredangle BAC, \qquad \measuredangle APC \leq 2\measuredangle ABC$$

P14. *Supongamos que a es un número real que cumple la ecuación $a^3 + 2a^2 + 10a = 20$.*

a) *Demostrar que a es irracional.*

b) *Demostrar que a^2 es irracional.*