Sesión de Problemas de Matemáticas
Granada, 23 de Enero de 2009

Problemas de geometría

P1. *Sea H el ortocentro de un triángulo ABC, P el punto de corte de la altura que pasa por A con el lado BC y Q el punto de corte de la semirrecta HP con la circunferencia circunscrita. Demostrar que $HP = PQ$.*

P2. *Sea ABC un triángulo y A', B' y C' los puntos de corte de las alturas que parten de A, B y C respectivamente con los correspondientes lados opuestos. Demostrar que las alturas del triángulo ABC son las bisectrices del triángulo $A'B'C'$ (y, por tanto, el ortocentro de ABC es el incentro de $A'B'C'$).*

P3. *Demostrar las siguientes afirmaciones:*

- *Si un triángulo tiene dos medianas iguales, entonces es isósceles.*
- *Si un triángulo tiene dos alturas iguales, entonces es isósceles.*
- *Si un triángulo tiene dos bisectrices iguales, entonces es isósceles.*

P4. *Sea p el perímetro de un triángulo ABC y P un punto interior al triángulo. Demostrar que*

$$\tfrac{p}{2} \leq AP + BP + CP \leq p$$

Problemas de números

P5. *Consideremos la ecuación $x^3 + y^3 = p$, donde p es un número primo y las incógnitas x, y son números naturales. Demostrar que si la ecuación tiene soluciones, entonces $p = 3n^2 - 3n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

P6. *Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ cumple que $2^n - 1$ es primo.*

- *Demostrar que n es primo.*
- *Demostrar que $2^n(2^n - 1)$ es un número perfecto, es decir, es igual a la suma de sus divisores (excluyendo en esta suma al propio número).*

P7. *Encontrar todos los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que $2^n - 1$ es divisible por 7 y todos los números naturales $n \in \mathbb{N}$ tales que $2^n + 1$ es divisible por 7.*

P8. *Demostrar que para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$, existen n números compuestos consecutivos.*

P9. *Calcular todas las parejas de números naturales* (a, b) *tales que* $a + b = ab$.

Problemas variados

P10. *Demostrar la siguiente desigualdad para cualquier número natural* n

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

P11. *En una reunión de* 2009 *personas, demostrar que hay dos personas que le han dado la mano al mismo número de personas.*

P12. *A un tablero de ajedrez* (8×8) *le quitamos las casillas de las esquinas. ¿Es posible rellenar el espacio restante con fichas de tamaño* 2×1*? ¿Y si sólo le quitamos dos esquinas opuestas?*

P13. *Sobre los vértices de un hexágono regular, se colocan, en sentido antihorario, los números* $\{1, 0, 1, 0, 0, 0\}$ *y se permite realizar la siguiente operación: sumarle o restarle* 1 *a dos vértices consecutivos. ¿Se puede, usando reiteradamente esta operación, llegar a que en todos los vértices haya un cero?*

P14. *Sean* a, b, c *números reales tales que* $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. *Demostrar que*

$$\tfrac{-1}{2} \leq ab + bc + ac \leq 1$$

¿Para qué valores de a, b, c *se dan las igualdades en estas desigualdades?*

P15. *Hallar todas las funciones* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *que cumplan que*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$