LVII Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
7 y 8 de mayo de 2021
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Problema 1

Los vértices, A, B y C, de un triángulo equilátero de lado 1 están en la superficie de una esfera de radio 1 y centro O. Sea D la proyección ortogonal de A sobre el plano, α, determinado por B, C y O. Llamamos N a uno de los cortes con la esfera de la recta perpendicular a α por O. Halla la medida del ángulo $\widehat{DNO}$.

(Nota: la proyección ortogonal de A sobre el plano α es el punto de corte con α de la recta que pasa por A y es perpendicular a α.)

Solución 1:

Es obvio que A, B, C y O son vértices de un tetraedro regular de arista igual a 1, puesto que la distancia entre dos cualesquiera de ellos es 1. Como D es la proyección ortogonal de A sobre la cara opuesta del tetraedro, D es el centro de la cara BCO. Así pues, la distancia de D a O (distancia del centro de un triángulo equilátero de lado 1 a uno de sus vértices) es

$$d(D,O) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Como el triángulo DNO es rectángulo en O, el cateto OD mide $1/\sqrt{3}$ y el cateto ON mide 1, el ángulo buscado es $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^{\text{o}}$.

Solución 2:

Elegimos un sistema de coordenadas (x, y, z) de modo que sea $O \equiv (0, 0, 0)$, α el plano $z = 0$ y la recta $y = z = 0$ (es decir, el eje x) que sea la mediatriz de BC por O, estando BC en el semiplano $x > 0$, $z = 0$. Tenemos así que, al ser $BC = 1$, son $B \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)$ y $C \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Por simetría respecto del plano $y = 0$, tenemos que $A \equiv (u, 0, v)$ con $u^2 + v^2 = 1$ para que A esté en la esfera, y $\left(u - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + v^2 = 1$ para que $AB = AC = 1$. Además, por ser D la proyección de A sobre α se tiene que $D \equiv (u, 0, 0)$ y $OD = |u|$. En consecuencia,

$$u^2 = 1 - v^2 = \left(u - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = u^2 - \sqrt{3}u + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}, \qquad OD = u = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Luego ODN es un triángulo rectángulo en O, con $ON = 1$ y $OD = \frac{1}{\sqrt{3}}$, concluyéndose que el ángulo buscado es $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^{\text{o}}$.

Problema 2

Dado un número entero positivo n, definimos $\lambda(n)$ como el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x^2 - y^2 = n$. Diremos que el número n es *"olímpico"* si $\lambda(n) = 2021$. ¿Cuál es el menor entero positivo que es olímpico? ¿Y cuál es el menor entero positivo impar que es olímpico?

Solución:

Distinguiremos 4 casos, según n sea impar o par y según n sea cuadrado perfecto o no.

(a) Sea $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ un número impar que no es cuadrado perfecto. Si $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = n$, con $x, y > 0$, entonces existen enteros positivos a, b, con $a > b$ y teniendo ambos la misma paridad, de manera que $x + y = a$ y $x - y = b$ (con lo que, $x = (a+b)/2$, $y = (a-b)/2$). Las formas de escribir n como un producto de dos números diferentes de la misma paridad son, en este caso, la mitad del número de divisores, por lo que tendremos que buscar números con 4042 divisores:

$$4042 = (a_1 + 1) \cdots (a_r + 1).$$

La descomposición de 4042 como producto de primos es $4042 = 2 \cdot 43 \cdot 47$. Por tanto, las opciones de números naturales con 4042 divisores son de la forma: $pq^{42}r^{46}$; pq^{2020}; $p^{42}q^{93}$; $p^{46}q^{85}$; o p^{4041}, en donde p, q, r son primos impares diferentes. Es inmediato comprobar que la opción que da el número más bajo es $3^{46} \cdot 5^{42} \cdot 7$.

(b) Consideremos ahora el caso en el que n es impar y cuadrado perfecto. En este caso, el número de divisores es impar, y como excluimos el caso de que los dos números de la factorización sean iguales, tenemos que buscar cuadrados perfectos con 4043 divisores:

$$4043 = (a_1 + 1) \cdots (a_r + 1).$$

La descomposición de 4043 como producto de primos es $4043 = 13 \cdot 311$, luego las únicas opciones son $p^{12}q^{310}$ y p^{4042}. El número más bajo es $3^{310} \cdot 5^{12}$, que es mayor que el que hemos encontrado antes.

(c) Supongamos ahora que $n = 2^k p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ es par, pero no un cuadrado perfecto. Nuevamente, tenemos que hacer la descomposición $n = ab$, siendo a y b de la misma paridad; esto hace que a y b tengan que ser pares, o sea, que $k \geq 2$ y no sirven los divisores impares. Por tanto, las opciones para el exponente de 2 en cada divisor son $1, 2, 3, \ldots, k-1$, pero nunca 0 ni k. Así pues,

$$4042 = (k-1)(a_1 + 1) \cdots (a_r + 1),$$

y las opciones son $2^3p^{42}q^{46}$; $2^{44}pq^{46}$; $2^{48}pq42$; $2^{87}p^{46}$; $2^{48}p^{85}$; $2^{95}p^{42}$; $2^{44}q^{93}$; 2^3p^{2020}; $2^{2022}p$; y 2^{4043} .También es válida la opción 4m, donde m es cualquiera de los números considerados en el apartado (a). El número más bajo es $2^{48} \cdot 3^{42} \cdot 5$, que es menor que el encontrado en el apartado (a).

(d) Por último, tenemos el caso en el que n es par y cuadrado perfecto, esto es $4043 = (k-1)(a_1 + 1) \cdots (a_r + 1)$ y las opciones son $2^{14}p^{310}$, $2^{312}p^{12}$ y 2^{4044}.También es válida la opción 4m, donde m es cualquiera de los números considerados en el apartado (b). Los tres números son mayores que el encontrado en el apartado (c).

Por consiguiente, el menor número olímpico es $2^{48} \cdot 3^{42} \cdot 5$ y el menor número impar olímpico es $3^{46} \cdot 5^{42} \cdot 7$.

Problema 3

Tenemos 2021 colores y 2021 fichas de cada color. Colocamos las 2021^2 fichas en fila. Se dice que una ficha, F, es "mala" si a cada lado de F quedan un número impar de las 2020×2021 fichas que no comparten color con F.

(a) Determina cuál es el mínimo número posible de fichas malas.

(b) Si se impone la condición de que cada ficha ha de compartir color con al menos una ficha adyacente, ¿cuál es el mínimo número posible de fichas malas?

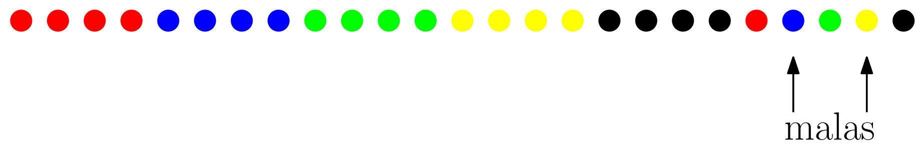
Solución 1:

(a) Como 2020×2021 es par, para decidir si una ficha es mala es suficiente comprobar que el número de fichas a su izquierda con las que no comparte color es impar. Sea A el conjunto de fichas que ocupan una posición impar en la fila, es decir, las fichas que tienen un número par de fichas a su izquierda. Es claro que $|A| = \frac{2021^2+1}{2}$.

Sea B el conjunto de fichas que, entre las de su color, ocupan una posición impar. Es decir, hay un número par de fichas de su color a su izquierda. Hay 1011 fichas de cada color en B, así que $|B| = 1011 \times 2021$.

Por construcción, las fichas que están en B pero no en A son malas (tienen un número impar de fichas a su izquierda, de las cuales un número par comparten color con ella). Por lo tanto, hay al menos $|B| - |A| = 2021 \times 1011 - \frac{2021^2+1}{2} = 1010$ fichas malas.

Este número se puede conseguir de la siguiente forma: colocamos 2020 fichas de color 1, luego 2020 fichas de color 2, etc., hasta tener 2020 fichas de cada color; luego colocamos las fichas restantes por orden de color. Las únicas fichas malas en esta configuración son las que son última de cada color par. En la imagen se ve esta configuración para 5 colores y 5 fichas de cada color.



(b) Sean $X = A \cap B$, $Y = A \cap B^c$ y $Z = A^c \cap B$, donde A y B son los conjuntos descritos en el apartado anterior. Las fichas malas son precisamente $Y \cup Z$ (contando las fichas a la izquierda que no comparten color con la ficha dada, como antes), por lo que tenemos que minimizar el tamaño de este conjunto.

Obsérvese que si la ficha F es adyacente a una ficha $F' \in Z$ del mismo color, entonces $F \in Y$. Como cada ficha de Z es adyacente a al menos una ficha de Y, y cada ficha de Y es adyacente a como mucho dos fichas de Z, tenemos que $|Z| \leq 2|Y|$.

Además, tenemos que $|Z|-|Y| = (|X|+|Z|)-(|X|+|Y|) = |B|-|A| = 1010$. Y concluimos que

$$|Y| + |Z| = 3(|Z| - |Y|) - 2(|Z| - 2|Y|) \geq 3 \times 1010 - 2 \times 0 = 3030.$$

(La conclusión del último párrafo también se puede obtener haciendo: $|Z| = 1010 + |Y| \geq 1010 + \frac{1}{2}|Z|$, luego $|Z| \geq 2020$ y $|Z| + |Y| \geq \frac{3}{2}|Z| \geq 3030$.)

Una forma de tener exactamente 3030 fichas malas es colocar primero 2018 fichas de color 1, luego 2018 de color 2, etc., y después colocar las tres fichas restantes de color 1, luego las tres de color 2, etc. Las únicas fichas malas son las tres últimas de cada color par.

Solución 2: Diremos que una ficha que no es mala, es "buena". Numeramos los colores de 1 a 2021. Decimos que una ficha es par (impar) si ocupa una posición par (impar) en la fila, y decimos que es color-par (color-impar) si de entre las fichas de su color, ocupa un lugar par (impar). Si una ficha es par y color-par, eso quiere decir que tiene antes de ella en la fila un número impar de fichas de su color, y también un número impar de fichas en total. Luego tiene antes que ella un número par de fichas de otros colores, y al ser $2020 \cdot 2021$ par el número total de fichas de otros colores, también tiene un número par de fichas de otros colores detrás de ella. Luego una ficha par y color-par es buena. De forma análoga, una ficha impar y color-impar es buena, pero son malas todas las fichas pares que son color-impares, y todas las fichas impares que son color-pares. Nótese que el número de fichas color-pares, pares, impares y color-impares son respectivamente

$$2021 \cdot 1010 < \frac{2021^2 - 1}{2} < \frac{2021^2 + 1}{2} < 2021 \cdot 1011.$$

Supongamos que hay exactamente u fichas que sean malas por ser impares pero color-pares. Esto quiere decir que hay exactamente $\frac{2021^2+1}{2} - u$ fichas que son buenas por ser impares y color-impares, luego el número de fichas que son malas por ser pares y color-impares es exactamente

$$2021 \cdot 1010 - \left(\frac{2021^2 + 1}{2} - u\right) = 1010 + u.$$

Las restantes fichas serán pares y color-pares y por lo tanto buenas, y el número total de fichas malas será igual a $1010 + 2u$.

(a) Podemos hacer $u = 0$, y por lo tanto que haya exactamente 1010 fichas malas, todas ellas pares y color-impares, si colocamos primero 2020 fichas del color 1, luego 2020 fichas del color 2, y así sucesivamente hasta el color 2021, y a continuación las 2021 fichas restantes, una de cada color. Nótese que las primeras $2020 \cdot 2021$ fichas, todas son bien pares y color-pares, bien impares y color-impares, luego buenas en cualquier caso. Las 2021 fichas últimas son cada una de ellas color-impares, pero de ellas 1011 son impares y por lo tanto buenas, y 1010 son pares y por lo tanto malas. El mínimo, alcanzable de esta forma, es entonces igual a 1010.

(b) Nótese que cada ficha mala por ser par y color-impar tiene ahora a su lado una ficha del mismo color, que por lo tanto será impar y color-par, luego $u > 0$. Asignemos cada ficha par y color-impar a la ficha contigua de su mismo color que es impar y color-par. Si una ficha par y color-impar es contigua a dos de su mismo color, la asignamos a una cualquiera de las dos. Nótese que como cada ficha impar y color-par tiene a lo sumo dos fichas vecinas, hay a lo sumo $2u$ fichas que pueden ser asignadas a u fichas impares y color-pares. Pero sabemos que hay exactamente $1010 + u$ fichas asignadas, luego $1010 + u \leq 2u$, y por lo tanto $u \geq 1010$. Concluimos que hay como mínimo 3030 fichas malas, alcanzándose ese mínimo si la asignación es completa, es decir si cada ficha mala por ser impar y color-par está rodeada de dos fichas malas de su mismo color, y cada ficha mala por ser par y color-impar es contigua sólo a una ficha mala de su mismo color. Esto puede conseguirse por ejemplo colocando primero 2018 fichas del color 1, luego 2018 fichas del color 2, y así hasta el color 2021, colocando después las restantes $3 \cdot 2021$ fichas, 3 de cada color, en 2021 ternas formada cada una por las 3 fichas restantes de cada color. Las primeras $2018 \cdot 2021$ fichas son claramente buenas, y de las 2021 ternas al final de la fila, 1011 ternas tienen su primera ficha impar y color-impar, y por lo tanto las 3 fichas de la terna son buenas, y 1010 ternas tienen su primera ficha par y color-impar, y por lo tanto las 3 fichas de la terna son malas. El mínimo, alcanzable de esta forma, es entonces igual a 3030.

Problema 4

Sean a, b, c, d números reales tales que

$$a+b+c+d=0 \qquad \text{y} \qquad a^2+b^2+c^2+d^2=12.$$

Halla el valor mínimo y el valor máximo que puede tomar el producto $abcd$, y determina para qué valores de a, b, c, d se consiguen ese mínimo y ese máximo.

Solución 1:

De las condiciones del enunciado tenemos que no todos los números tienen el mismo signo. El producto $abcd$ tomará un valor positivo cuando dos números sean positivos y dos negativos, así que buscaremos el máximo suponiendo que $a, b > 0$ y $c, d < 0$. Notemos que

$$2(ab+cd) \leq a^2+b^2+c^2+d^2=12, \tag{1}$$

con lo que $ab+cd \leq 6$. Utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$(ab)\cdot(cd) \leq \left(\frac{ab+cd}{2}\right)^2 \leq 9. \tag{2}$$

La igualdad en (2) se alcanza cuando $ab=cd=3$, con lo que (1) obliga a que sea $(a-b)^2=(c-d)^2=0$; es decir, $a=b$ y $c=d$. Así pues, $a=b=\sqrt{3}$, $c=d=-\sqrt{3}$. El valor máximo de la expresión es por tanto 9.

Para hallar el valor mínimo supondremos que $a, b, c > 0$ y que $d < 0$. (Si tres de los números son negativos y el otro positivo, considerando sus opuestos tenemos que el valor de $abcd$ permanece invariante.) Por tanto, $d=-(a+b+c)$ y

$$a^2+b^2+c^2+d^2=2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=12.$$

Esto quiere decir que

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+ab+bc+ca \leq 6+\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2} \leq 9,$$

donde se ha usado que, por la desigualdad de Cauchy, $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$. Por tanto, $a+b+c \leq 3$. El problema es equivalente a encontrar el máximo valor posible de $abc(a+b+c)$. Usando nuevamente la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} \qquad \text{y por tanto} \qquad abc(a+b+c) \leq \frac{(a+b+c)^4}{27} \leq 3.$$

En consecuencia, el valor mínimo es -3 y se alcanza en los casos $(3,-1,-1,-1)$ y $(1,1,1,-3)$ (o permutaciones de estos).

Solución 2:

Aplicando la desigualdad de las medias cuadrática y geométrica a $|a|, |b|, |c|, |d|$, tenemos que

$$|a| \cdot |b| \cdot |c| \cdot |d| \leq \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \right)^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 = 9,$$

con igualdad si y sólo $|a| = |b| = |c| = |d| = \sqrt{3}$. Con la condición $a + b + c + d = 0$, esto sólo es posible si exactamente dos de entre a, b, c, d son positivos y los otros dos negativos. Como esta cota máxima es independiente de la condición $a + b + c + d = 0$, tenemos entonces que el máximo valor posible de $abcd$ es 9, y se obtiene si y sólo si dos de entre a, b, c, d son $\sqrt{3}$ y los otros dos son $-\sqrt{3}$.

Tomando $a = 3, b = c = d = -1$, se obtiene $abcd = -3$, con lo que el valor mínimo del producto ha de ser negativo, y se debe conseguir claramente cuando un número impar de los a, b, c, d es negativo, y los demás son positivos. Como invertir simultáneamente los signos de a, b, c, d deja inalteradas las condiciones y el producto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a > 0 > b, c, d$ para el mínimo de $abcd$. Ahora bien, por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica aplicadas a $|b|, |c|, |d|$ tenemos que

$$|bcd| = |b| \cdot |c| \cdot |d| \leq \left(\frac{|b| + |c| + |d|}{3} \right)^3 = \left(\frac{-b - c - d}{3} \right)^3 = \frac{a^3}{27},$$

con igualdad si y sólo si $b = c = d$, mientras que por la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática,

$$a = |b| + |c| + |d| \leq 3\sqrt{\frac{b^2 + c^2 + d^2}{3}} = 3\sqrt{\frac{12 - a^2}{3}}, \qquad a^2 \leq 36 - 3a^2,$$

por lo que $a \leq 3$, con igualdad si y sólo si $b = c = d = -1$. Luego cuando $a > 0 > b, c, d$, tenemos que

$$abcd = -a|bcd| \geq -\frac{a^4}{27} \geq -3,$$

y el mínimo valor posible de $abcd$ es -3 y, restaurando la generalidad, se obtiene si y sólo si (a, b, c, d) es una permutación de $(\pm 3, \mp 1, \mp 1, \mp 1)$.

Problema 5

Disponemos de $2n$ bombillas colocadas en dos filas (A y B) y numeradas de 1 a n en cada fila. Algunas (o ninguna) de las bombillas están encendidas y el resto apagadas; decimos que eso es un "estado". Dos estados son distintos si hay una bombilla que está encendida en uno de ellos y apagada en el otro. Diremos que un estado es "bueno" si hay la misma cantidad de bombillas encendidas en la fila A que en la B.

Demuestra que el número total de estados buenos, EB, dividido por el número total de estados, ET, es

$$\frac{EB}{ET} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n\, n!}.$$

Solución 1:

Es obvio que $ET = 2^{2n}$, puesto que cada una de las $2n$ bombillas puede estar apagada o encendida. El número de "estados buenos" con k bombillas encendidas en cada fila es $\binom{n}{k}^2$, ya que hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir las k bombillas encendidas de la fila A y otras tantas de elegir las k bombillas encendidas de la fila B. En consecuencia,

$$EB = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Es conocido que esa suma da como resultado $EB = \binom{2n}{n}$. En cualquier caso, basta con observar que un estado es "bueno" si hay exactamente k $(0 \le k \le n)$ bombillas encendidas en la fila A y exactamente $n-k$ bombillas apagadas en la fila B. Cada "estado bueno" se obtiene (de una única manera) eligiendo n bombillas en total y haciendo que estén encendidas las elegidas de la fila A y las no elegidas de la fila B. Así pues, $EB = \binom{2n}{n}$.

Ahora, tenemos:

$$\frac{EB}{ET} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!\, n!} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)}{2^{2n} n!\, n!} =$$

$$= \frac{2^n n! \left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)}{2^{2n} n!\, n!} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n\, n!}.$$

Solución 2:

Si empezamos "desde el final", notemos que

$$\frac{(2n)!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)} = (2n) \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2 = 2^n \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = 2^n \cdot n!,$$

y como claramente $ET = 2^{2n}$ porque cada una de las $2n$ bombillas puede estar, independientemente de las demás, encendida o apagada, el problema se reduce a demostrar que

$$EB = 2^{2n} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!} = 2^{2n} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

La demostración de que $EB = \binom{2n}{n}$ puede hacerse de distintas maneras. Una de ellas la dada en la Solución 1. Otras maneras son:

Considerando el binomio $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$. El coeficiente de x^n es por una parte igual a $\binom{2n}{n}$, y por otra igual a la suma de los productos de los coeficientes respectivos $\binom{n}{m}$ y $\binom{n}{n-m}$ de x^m y x^{n-m} en cada $(1+x)^n$.

También puede verse como el número de caminos en una cuadícula de $n \times n$, desde $(0,0)$ hasta (n, n), en la que cada desplazamiento lleva desde (x,y) bien a $(x+1,y)$ bien a $(x,y+1)$. El número total de caminos, cada uno de los cuales ha de tener $2n$ desplazamientos de los que n son en horizontal y n en vertical, es $\binom{2n}{n}$. Ahora bien, si consideramos la diagonal "descencente" formada por los puntos (x,y) tales que $x+y=n$, cada camino ha de pasar por exactamente uno de ellos. Los que pasan por $(m, n-m)$ tienen, en sus primeros n desplazamientos, m horizontales y $n-m$ verticales, y en sus siguientes n desplazamientos, $n-m$ horizontales y m verticales, para un total de $\binom{n}{m}\binom{n}{n-m} = \binom{2n}{n}^2$ caminos pasando por ese punto. Sumando las contribuciones de cada elemento de esta diagonal se halla la relación pedida.

Problema 6

Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$, sea I su incentro, γ su circunferencia inscrita y D el punto medio de BC. La tangente a γ por D diferente de BC toca a γ en E. Demuestra que AE y DI son paralelas.

Solución 1:

(Ver la figura 1) Sea P el punto de tangencia de γ con BC. Sean Q y R los puntos simétricos de P con respecto a D e I, respectivamente. Tenemos que:

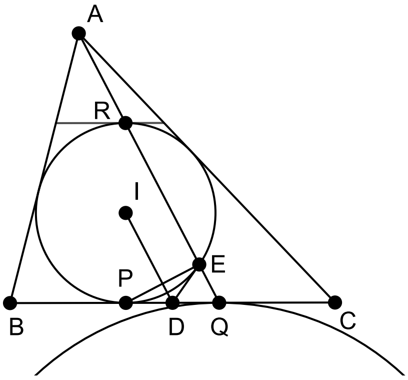
- ER **es paralela a** DI. Por un lado, DI es perpendicular a PE (es de hecho la mediatriz de PE). Por otro lado, por ser R el punto diametralmente opuesto a P en γ el ángulo $\angle PER$ es recto.

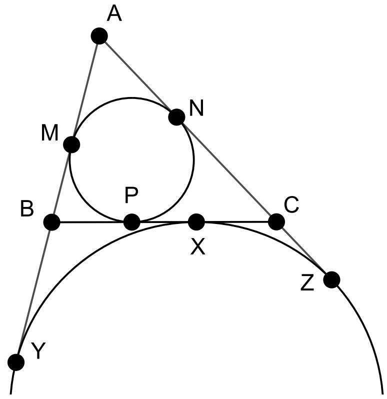
- QR **es paralela a** DI. Esto es así porque D e I son los puntos medios de PQ y PR.

De ahí se deduce que Q, R y E están alineados, en una recta paralela a DI. Para concluir el problema basta demostrar que A, Q y R están alineados.

Trazando la paralela a BC por R obtenemos un triángulo semejante a ABC, que es el resultante de tomar una homotecia de ABC con respecto a A. Tanto R como Q son los puntos de tangencia de la circunferencia exinscrita del lado opuesto de A, por lo que la homotecia envía Q a R. Concluimos que A, Q y R están alineados.

Nota: (Ver la figura 2) A continuaciónn se incluye la demostración de que los puntos de tangencia de las circunferencias inscrita y exinscrita con BC son simétricos con respecto al punto medio de BC. Usando la notación de la figura, tenemos que demostrar que $BP = CX$. Por un lado tenemos que $BP + CP = BX + CX$. Por otro, tenemos $CP - BP = CN - BM = CN + AN - BM - AM = AC - AB = (AY - AB) - (AZ - AC) = BY - CZ = BX - CX$. De este sistema de ecuaciones se halla $BP = CX$.





Solución 2:

Sea P el punto de tangencia de γ con BC, y sean S y T los puntos medios de EP y AP, respectivamente. Claramente ST es paralela a AE. Como DI es la mediatriz de EP, tenemos que S está en DI. Por lo tanto, el problema se reduce a demostrar que T está en DI.

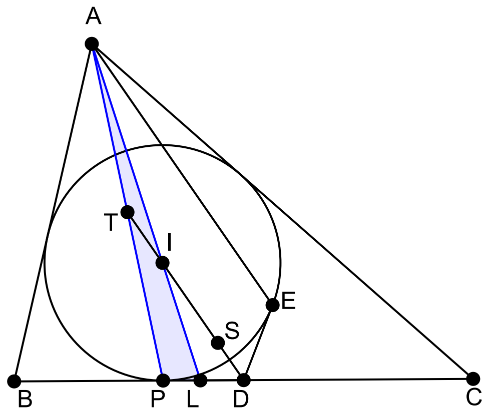
Sea L el punto en el que la bisectriz AI corta a BC. Aplicando el teorema de Menelao al triángulo APL, tenemos que demostrar que $\frac{AT}{TP}\frac{PD}{DL}\frac{LI}{IA} = 1$. Por definición de T, $\frac{AT}{TP} = 1$.

Si a, b y c son las longitudes de los lados de ABC, por el teorema de la bisectriz tenemos $\frac{BL}{CL} = \frac{c}{b}$. Como $BL + LC = a$, tenemos $CL = \frac{ab}{b+c}$. Aplicando ahora el teorema de la bisectriz a ALC, tenemos $\frac{LI}{IA} = \frac{CL}{CA} = \frac{a}{b+c}$.

Tenemos también $CD = \frac{a}{2}$ y $CP = \frac{a+b-c}{2}$, con lo que

$$\frac{PD}{DL} = \frac{CP - CD}{CL - CD} = \frac{\frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2}}{\frac{ab}{b+c} - \frac{a}{2}} = \frac{b+c}{a}.$$

Sustituyendo, obtenemos $\frac{AT}{TP}\frac{PD}{DL}\frac{LI}{IA} = 1$, como queríamos demostrar



Solución 3:

Sea ω la circunferencia con centro D que pasa por E. Por simetría respecto de la recta DI, ω también pasa por el punto F de tangencia de γ con BC. El segundo punto, G, donde ω corta a BC es claramente el simétrico de F con respecto al punto medio D de BC, que como es conocido es el punto donde la circunferencia $A-$exinscrita es tangente al lado BC. Es también conocido que existe una homotecia con centro A que convierte γ en esta circunferencia $A-$exinscrita, y por esta homotecia, los puntos A y G están alineados con el punto F' diametralmente opuesto a F en γ. Ahora bien, como FG es diámetro de ω y FF' es diámetro de γ estando E en ambas circunferencias, se tiene que $\angle FEF' = \angle GEF = 90^o$, luego F', E, G están alineados, y por lo tanto la recta AE es perpendicular a FE. Como E, F son los puntos de corte de γ y ω, son simétricos respecto a la recta DI que une sus centros. Luego DI es perpendicular a FE, y por lo tanto paralela a AE, como queríamos demostrar.

Solución 4:

Sea un sistema de coordenadas cartesianas tal que el eje horizontal sea la recta BC, y el eje vertical pase por I. Se tiene entonces que $D \equiv (\delta, 0)$ para un cierto $\delta \neq 0$ y que como D es el punto medio de BC, $B \equiv (-\Delta + \delta, 0)$ y $C \equiv (\Delta + \delta, 0)$, donde $\Delta = \frac{a}{2}$. Además, $I \equiv (0, r)$, donde r es el inradio.

El origen O que es el punto de tangencia de BC con γ y E son claramente simétricos respecto a la recta $DI \equiv y = r - \frac{rx}{\delta}$. Luego E está en la recta $y = \frac{\delta x}{r}$, y sobre la circunferencia γ, que es $x^2 + (y - r)^2 = r^2$. Se tiene entonces por sustitución, y descartando la solución $x = 0$ que produce O, que

$$E \equiv \left(\frac{2r^2\delta}{r^2 + \delta^2}, \frac{2r^2\delta}{r^2 + \delta^2} \right).$$

De forma análoga podemos hallar el punto de tangencia de γ con el lado AB, sin más que sustituir la coordenada horizontal δ de D por la coordenada horizontal $-\Delta + \delta$ de B, obteniéndose que este punto es

$$E \equiv \left(\frac{2r^2(\delta - \Delta)}{r^2 + (\delta - \Delta)}, \frac{2r(\delta - \Delta)^2}{r^2 + (\delta - \Delta)^2} \right).$$

y por lo tanto la recta AB, que pasa por este punto y por B, tiene ecuación

$$y = \frac{2r(\delta - \Delta)}{r^2(\delta - \Delta)^2}(x - \delta + \Delta).$$

Como la coordenada horizontal de C es igual a la de B pero con signo opuesto para Δ, invirtiendo el signo de Δ en la anterior ecuación, obtenemos la de la recta AC:

$$y = \frac{2r(\delta - \Delta)}{r^2 - (\delta + \Delta)^2}(x - \delta - \Delta).$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos

$$A \equiv \left(\frac{2r^2\delta}{r^2+\delta^2-\Delta^2}, \frac{2r(\delta^2-\Delta^2)}{r^2+\delta^2-\Delta^2} \right).$$

La pendiente de la recta AE viene entonces dada por la diferencia entre sus coordenadas y,

$$\frac{2r^3\Delta^2}{(r^2+\delta^2)(r^2+\delta^2-\Delta^2)}$$

dividida entre la diferencia de sus coordenadas x,

$$\frac{2r^2\delta\Delta^2}{(r^2+\delta^2)(r^2+\delta^2-\Delta^2)},$$

que es claramente igual a $-\frac{r}{\delta}$, y por lo tanto igual a la pendiente de DI, y hemos terminado.

Nota: En esta solución puede haber en algún momento denominadores que se anulen, casos que por lo tanto han de ser tratados aparte. En concreto, los denominadores que podrían a priori anularse son $r^2-(\delta-\Delta)^2$, $r^2-(\delta+\Delta)^2$ y $r^2+\delta^2-\Delta^2$. El que $r^2=(\delta-\Delta)^2$ no es sin embargo ningún problema. En ese caso, la recta AB sería vertical, y la coordenada x de A sería

$$\frac{2(\delta-\Delta)^2\delta}{(\delta-\Delta)^2)+\delta^2-\Delta^2},$$

idéntica a la de B, quedando determinada la coordenada y de A por la recta AC.

De forma análoga, si $r^2=(\delta-\Delta)^2$, la recta AC sería vertical, siendo la coordenada x de A igual a $\delta+\Delta$, y quedando determinada su coordenada y por la recta AB. Finalmente, como $\Delta=\frac{a}{2}$ y $\delta=|\frac{a}{2}-\frac{c+a-b}{2}|=\frac{|b-c|}{2}$, tenemos que $r^2=\Delta^2-\delta^2$ es equivalente a

$$r^2=\frac{a^2-(b-c)^2}{4}=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4}=bc\sin^2\frac{A}{2}=r^2\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2},$$

donde hemos usado el conocido resultado $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{C}{2}$. Ahora bien, a su vez esto sería equivalente a $\cos\frac{B+C}{2}=0$, absurdo pues $B+C<90^o$. Obsérvese que la condición para que ese tercer denominador se anule es $B+C=180°$. Esto es intuitivamente consistente con que el denominador al hallar las coordenadas de A se anule: el que este denominador sea nulo es equivalente a que el punto A esté "en el infinito", que a su vez es equivalente a que las rectas AB y AC sean paralelas, es decir $B+C=180°$.

En definitiva, los denominadores que pueden realmente anularse no suponen un problema en la solución propuesta, sino que simplemente indican que dos de las rectas definidas en la solución son verticales.