FASE LOCAL DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA.

Curso 2019-2020.

Propuesta de problemas (con soluciones).

Sesión viernes mañana.

Problema 1. Dado un número natural $n > 1$, realizamos la siguiente operación: si n es par, lo dividimos entre dos; si n es impar, le sumamos 5. Si el número obtenido tras esta operación es 1, paramos el proceso; en caso contrario, volvemos a aplicar la misma operación, y así sucesivamente. Determinar todos los valores de n para los cuales este proceso es finito, es decir, se llega a 1 en algún momento.

Solución. En primer lugar, es inmediato comprobar que siempre que empezamos por 2, 3 o 4 el proceso termina y que si empezamos por 5 entramos en el bucle (5, 10, 5, 10, ...) y nunca acabamos.
Si el número por el que se empieza es mayor que 5, en uno o dos pasos siempre pasamos a un número más pequeño. Para comprobar esto, observemos que si n es par, resulta evidente; si es impar, esto se sigue de la desigualdad $\frac{n+5}{2} < n$, ya que $\frac{n+5}{2}$ es el número obtenido tras dos iteraciones. Por tanto, siempre acabamos llegando a un número menor o igual que 5 y únicamente no terminaremos en aquellos casos para los que se vaya a parar al 5 después de un número cualquiera de iteraciones.
Ahora bien, aplicando sucesivamente las operaciones *sumar cinco* o *dividir entre 2* siempre mantenemos la propiedad de ser múltiplo de 5, con lo cual tenemos simultáneamente los dos resultados que queremos: (a) Para aquellos números que no son múltiplos de 5, aplicando sucesivamente las operaciones, siempre se acaba llegando a 1, 2, 3 o 4 y por lo tanto no hay ciclo. (b) De la misma manera, cualquier múltiplo de 5 acaba llegando al 5 y provocando una repetición infinita que nunca llega al número 1. Por ende, el proceso es finito si y solo si n no es múltiplo de 5.

Problema 2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ 2020 números reales de manera que la suma de 1009 de ellos cualesquiera es positiva. Demostrar que la suma de los 2020 números también es positiva.

Solución 1. Sea S la suma de los 2020 números dados. Podemos escribir el número 1009S como la suma de 1009 veces S. Esto da como resultado

$$\begin{aligned}
1009\,S &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&+ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&+ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&+ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&= (a_1 + a_2 + \ldots + a_{1008} + a_{1009}) + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{1009} + a_{1010}) \\
&+ \ldots + (a_{2020} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{1008}).
\end{aligned}$$

Como todas las sumas de 1009 números (se han coloreado 3 de esas sumas) son positivas, entonces $1009S$ es positivo y la suma S de los números dados tiene que ser positiva, como se pedía.

Solución 2. Sea S la suma de los 2020 números dados. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2020}$. Por la condición del enunciado, la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1009}$ es positiva. Esto quiere decir que al menos uno de los sumandos es positivo, en particular a_{1009} lo es por ser el mayor de ellos. Por lo tanto, a_i es positivo para todo $1010 \leq i \leq 2020$. Si escribimos

$$S = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{1009}) + a_{1010} + a_{1011} + \cdots + a_{2020},$$

observamos que hemos escrito S como la suma de términos positivos, con lo cual su valor es positivo.

Problema 3. Determinar todos los valores reales de (x, y, z) para los cuales

$$\begin{array}{ccc} x + y + z & = & 1 \\ x^2y + y^2z + z^2x & = & xy^2 + yz^2 + zx^2 \\ x^3 + y^2 + z & = & y^3 + z^2 + x. \end{array}$$

Solución. La segunda ecuación la podemos reescribir como

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 0.$$

Ahora, dado que la tercera ecuación no es simétrica, vamos a distinguir 3 casos diferentes:

(a) Si $x = y$, la tercera ecuación queda

$$x^2 + z = z^2 + x,$$

o alternativamente

$$(x - z)(x + z - 1) = 0.$$

Por tanto, de las dos últimas tenemos que las opciones son $(\lambda, \lambda, \lambda)$ o $(\lambda, \lambda, -\lambda{+}1)$. Sustituyendo en la primera tenemos directamente dos soluciones del sistema, que son $(1/3, 1/3, 1/3)$ y $(0, 0, 1)$.

(b) Si $x = z$, la tercera ecuación queda

$$x^3 + y^2 = y^3 + x^2,$$

o alternativamente

$$(x - y)(x^2 + y^2 + xy - x - y) = 0.$$

De aquí obtenemos, sustituyendo en la primera ecuación, dos nuevas soluciones (además de la correspondiente a $x = y = z$), que son $(0, 1, 0)$ y $(2/3, -1/3, 2/3)$.

(c) Si $y = z$, la tercera ecuación queda

$$x^3 + y = y^3 + x,$$

o alternativamente

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0.$$

De aquí obtenemos dos nuevas soluciones, $(1, 0, 0)$ y $(-1, 1, 1)$

Por tanto, el sistema tiene las seis soluciones que hemos hallado.

Sesión viernes tarde.

Problema 1. Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a).$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solamente si $a = b = c$.

Solución 1. En primer lugar, observamos que cuando $a = b = c$ se tiene que $p(x) = 3(x-a)^2$, que claramente satisface $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Supongamos ahora que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Desarrollando la expresión como un polinomio cuadrático, obtenemos que

$$p(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca \geq 0.$$

En particular, esto quiere decir que el discriminante del polinomio, Δ, es menor o igual que 0. Dicho discriminante se puede obtener como

$$\Delta = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$0 \geq 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

y de aquí se sigue que necesariamente $a = b = c$.
Solución 2. En primer lugar, observamos que cuando $a = b = c$ se tiene que $p(x) = 3(x-a)^2$, que claramente satisface $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Supongamos ahora que a, b y c no son todos iguales. Supongamos primero que los tres son distintos, sin pérdida de generalidad $a < b < c$. Entonces se tiene $p(b) = (b-c)(b-a) < 0$, con lo que es falso que $p(x)$ sea siempre no negativo.
Supongamos entonces que exactamente dos de los valores a, b y c son iguales, sin pérdida de generalidad $a = b$. Podemos sacar $x - a$ como factor común en la expresión de $p(x)$, y obtenemos

$$p(x) = (x-a)(3x-a-2c),$$

de lo que se deduce que a y $\frac{a+2c}{3}$ son las dos raíces de $p(x)$, que son distintas porque $a \neq c$. Concluimos que $p(x)$ es negativo en el intervalo abierto entre ambas raíces.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea I su incentro. El incírculo es tangente al lado BC en el punto D. Sea E el único punto que satisface que D es el punto medio del segmento BE. La línea perpendicular a BC que pasa por E corta a CI en el punto P. Demostrar que BP es perpendicular a AD.
Observación. El incírculo de ABC es el círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. El incentro es el centro de dicho círculo.
Solución 1. Como P está en la bisectriz de $\angle ACB$, el círculo γ de centro P y radio PE es tangente al lado AC en un punto J. De esta manera $AJ = AC - CJ = AC - CE = AC - BC + 2BD = AC - BC + (AB + BC - AC) = AB$. Esto implica que el cuadrilátero $ABDP$ tiene diagonales perpendiculares, ya que

$$AB^2 + DP^2 = AB^2 + PE^2 + DE^2 = AJ^2 + PJ^2 + BD^2 = AJ^2 + BD^2,$$

donde hemos usado que los triángulos AJP y BEP son rectángulos.

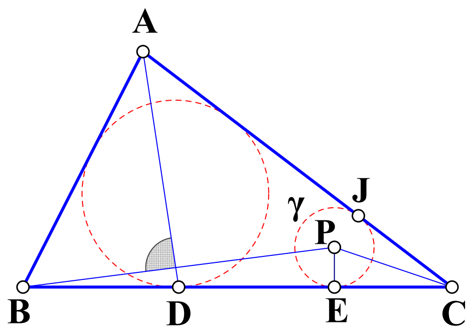


Figura 1: Esquema para resolver el Problema 2

Solución 2. Vamos a considerar un sistema de coordenadas centrado en B y de manera que BC es coincidente con el eje de abscisas. Como es habitual, llamaremos a, b y c a las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente; p designará al semiperímetro del triángulo; r al radio del incírculo; y $\beta = \angle ABC$. De esta manera, no resulta complicado identificar las coordenadas de los puntos B, P, A y D. En primer lugar, $B = (0, 0)$ y $A = (c \cos\beta, 2pr/a)$, dado que la altura sobre el lado a, h_a, cumple que

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2pr}{a},$$

siendo S el área del triángulo. Por otra parte, $D = (p - b, 0)$. Finalmente, aplicando el teorema de Tales a los triángulos CEP y CDI, obtenemos que $P = (a + c - b, (b - c)r/(p - c))$.
Solo queda por comprobar que el producto escalar de los vectores es cero para obtener así la perpendicularidad buscada. Aplicando el teorema del coseno para expresar $\cos\beta$ en función de los lados, obtenemos entonces que el resultado a probar es equivalente a

$$\frac{(c-b)(p-a)}{a} \cdot 2(p-b) + \frac{2pr}{a} \cdot \frac{(b-c)r}{p-c} = 0.$$

Si dividimos por $b - c$ (dado que $c < b$ por la condición del enunciado), nos queda

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$$

Ahora bien, esta expresión es claramente cierta como resultado de combinar la igualdad $r = S/p$ con la fórmula de Herón, y por tanto hemos concluido.

Problema 3. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de tamaño $n \times n$, algunas casillas tienen un espejo de doble cara a lo largo de una de sus diagonales. En el exterior de cada casilla de los lados izquierdo y derecho de la cuadrícula se encuentra un puntero láser, que apunta horizontalmente hacia la cuadrícula. Los láseres se numeran de 1 a n en cada lado, en ambos casos de arriba hacia abajo. Un láser es rojo cuando sale de la cuadrícula por el borde superior y es verde si sale de la cuadrícula por el borde inferior. Si cada láser sale o bien por el borde inferior o por el superior, demostrar que la suma de los láseres rojos es menor o igual que la suma de los láseres verdes.
Solución. Consideremos la unión S de las líneas de centros de cada fila y columna. Como cada espejo forma un ángulo de 45 grados con las direcciones de la cuadrícula,

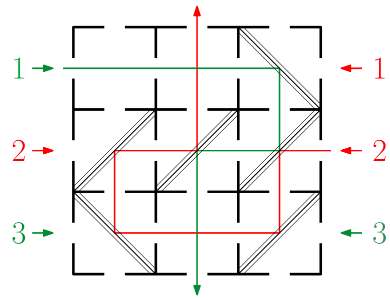


Figura 2: Un ejemplo de una configuración para el Problema 3, donde se muestran los recorridos de dos láseres.

los láseres se mueven a lo largo de S. Además, ningún segmento puede ser usado por dos láseres distintos. En efecto, si fuesen en la misma dirección, sería posible rehacer la pista de los láseres hasta su punto de partida, que debería ser el mismo para ambos. Si fuesen en direcciones contrarias, cada uno acabaría en el origen del otro, lo cual es imposible porque sabemos que ambos acaban en el borden superior o en el inferior, y nunca en el lateral. Hay $2n$ láseres y $2n$ puntos por los que un láser puede abandonar la cuadrícula, con lo que hay una biyección entre esos dos conjuntos. En particular, hay n láseres rojos que podemos numerar $r_1, \ldots, r_n$ y n láseres verdes, con números $v_1, \ldots, v_n$.
Un láser solo se puede mover verticalmente a través de los segmentos verticales de S, cuya longitud total es de n^2. Un láser rojo con número r_i necesita atravesar una distancia de al menos $r_i - 1/2$ usando segmentos verticales, mientras que uno verde con el número v_i necesita por lo menos $n - v_i + 1/2$. Se tiene por tanto la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \left(r_i - \frac{1}{2} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(n - v_i + \frac{1}{2} \right) \leq n^2,$$

de donde se deduce directamente que $\sum r_i \leq \sum v_i$, como queríamos demostrar.

Sesión sábado mañana.

Problema 1. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.

Solución. Ana tiene una estrategia ganadora para $n = 1, 3$ y para todos los números pares mayores que 3. En primer lugar, observamos que en los casos $n = 1, 2, 3$ todos los movimientos están determinados y Ana gana cuando $n = 1$ o $n = 3$. Si el número inicial de piedras es par y mayor que 4, Ana puede coger una sola piedra, lo cual obliga a Bernardo a coger solamente otra. De esta manera, Ana puede forzar a que se llegue a una situación con 4 piedras en la bolsa en el momento de su turno. En este caso, Ana coge 2 piedras, lo cual deja a Bernardo en una posición perdedora y por lo tanto Ana gana el juego.
De forma análoga, si el juego empieza con un número impar y mayor que 4 de piedras, Ana tiene que coger necesariamente una sola piedra, lo cual deja a Bernardo en una posición ganadora. Por consiguiente, Ana únicamente puede ganar si $n = 1, 3$ o el número es par y mayor que 3.

Problema 2. Determinar para qué valores de n existe un polígono convexo de n lados cuyos ángulos internos, expresados en grados, son todos enteros, están en progresión aritmética y no son todos iguales.

Solución. Sea x la medida del ángulo mayor y d la diferencia de la progresión aritmética. De esta manera,

$$nx - \frac{dn(n-1)}{2} = 180(n-2),$$

o alternativamente

$$720 = n(360 - 2x + d(n-1)). \tag{1}$$

Como $360 - 2x > 0$ por tratarse de un polígono convexo, necesariamente sucede que

$$n(n-1) < dn(n-1) < 720. \tag{2}$$

En particular, resolviendo la ecuación cuadrática, tenemos que $n \leq 27$. Ahora bien, si analizamos la ecuación (1), resulta que n divide a 720, por lo que basta con ceñirse a los divisores de 720 que estén entre 3 y 27, esto es: $\{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24\}$.
Vamos a analizar cuándo hay una solución para $d = 1$. En ese caso, ha de ser

$$x = \frac{n - 1 + 360 + 720/n}{2}.$$

Si n es impar, $n - 1$ será par y para tener un número entero tenemos que imponer que $720/n$ sea par, lo cual está claro si n es impar. Eso nos da soluciones para $\{3, 5, 9, 15\}$.
Si n es par, $720/n$ ha de ser impar, con lo que n tiene que ser múltiplo de 16 y solo proporciona una solución para $n = 16$.
Para el resto de casos, podemos asumir ahora que $d \geq 2$, y volviendo a (2) tenemos que $n \leq 18$, lo que descarta $n = 20$ y $n = 24$ y deja 6 casos para analizar con $d = 2$, donde

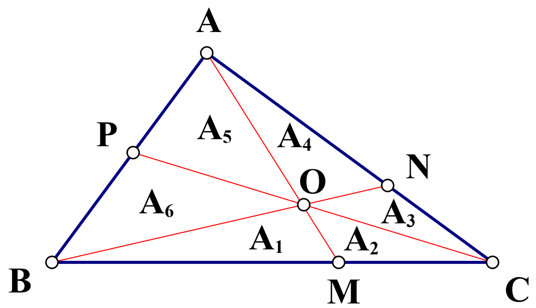
se tiene que

$$x = \frac{2(n-1) + 360 + 720/n}{2}.$$

Esto hace que solo tengamos que imponer que $720/n$ sea par, lo que se logra siempre que n no sea múltiplo de 16 y funciona por tanto para $n \in \{4, 6, 8, 10, 12, 18\}$. Concluimos entonces que lo pedido en el enunciado es posible para

$$n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18\}.$$

Problema 3. Sea O un punto interior del triángulo ABC y sean M, N y P las intersecciones de AO con BC, BO con CA y CO con AB, respectivamente. Demostrar que de entre los seis triángulos que se forman, hay al menos dos cuya área es menor o igual que $[ABC]/6$.
Observación. $[ABC]$ denota el área del triángulo ABC.



Solución. Sea $S = [ABC]$, $A_1 = [BOM]$, $A_2 = [MOC]$, $A_3 = [NOC]$, $A_4 = [AON]$, $A_5 = [AOP]$ y $A_6 = [BOP]$. Usando el teorema de Ceva obtenemos que

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{A_3}{A_4} \cdot \frac{A_5}{A_6} = 1,$$

y por lo tanto

$$A_1 \cdot A_3 \cdot A_5 = A_2 \cdot A_4 \cdot A_6.$$

Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resultará que

$$\left(\frac{S}{6}\right)^6 = \left(\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6}{6}\right)^6 \geq A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6.$$

De esta manera, tenemos que

$$\left(\frac{S}{6}\right)^3 \geq A_1 A_3 A_5, \quad \left(\frac{S}{6}\right)^3 \geq A_2 A_4 A_6,$$

y de aquí se sigue inmediatamente que

$$\text{mín}\{A_1, A_3, A_5\} \leq \frac{S}{6}, \quad \text{mín}\{A_2, A_4, A_6\} \leq \frac{S}{6}.$$

Queda por tanto demostrado que al menos dos de las seis cantidades son menores o iguales que $S/6$, como queríamos.

Sesión sábado tarde.

Problema 1. Demostrar que la suma de los divisores positivos de un número de la forma $3k+2$ siempre es un múltiplo de 3.

Solución 1. Sea n el número en cuestión y consideremos un divisor suyo cualquiera, d. Como $n = 3k+2$, d no puede ser múltiplo de 3. Si $d = 3\ell + 1$, entonces n/d, que es otro divisor distinto de n (dado que n no es cuadrado perfecto), será de la forma $3\ell' + 2$, y viceversa. Por tanto, podemos agrupar a los divisores de n en parejas $\{d, n/d\}$ de manera que la suma es múltiplo de 3, y por lo tanto la suma de todos los divisores también es múltiplo de 3.

Solución 2. Sea $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ la descomposición de n en factores primos. Por ser n de la forma $3k+2$, uno de los factores primos ha de ser de la forma $3\ell+2$ y estar elevado a exponente impar. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dicho factor primo es p_1. La suma de los divisores de n se expresa por la fórmula

$$\frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdots \frac{p_r^{a_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

En esta expresión, el primero de los factores es múltiplo de 3, al serlo $p_1^{a_1+1} - 1$ pero no $p_1 - 1$. Esto es así ya que resulta inmediato comprobar que cualquier número de la forma $3a+2$ elevado a un exponente par da como resultado un número de la forma $3b+1$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea D el pie de la altura correspondiente al lado BC; M el punto medio del lado BC y F el punto de corte de la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$ con el lado BC. Determinar todos los triángulos para los cuales F es el punto medio del segmento DM.
Observación. Se entiende que la determinación de un triángulo consiste en dar la longitud de sus lados, en términos de algún parámetro si fuese menester.

Solución. La condición $DF = FM$ se puede reescribir como

$$2BF = BM + BD. \tag{3}$$

Si llamamos a, b y c a las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente, y aplicamos el teorema de la bisectriz tendremos que

$$\frac{BF}{c} = \frac{FC}{b} = \frac{a}{b+c}.$$

Por consiguiente,

$$BF = \frac{ac}{b+c}. \tag{4}$$

Por otra parte, aplicando primero trigonometría en el triángulo ABD y luego el teorema del coseno en el triángulo ABC,

$$BD = c\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}. \tag{5}$$

Sustituyendo los valores de (4) y (5) en (3), obtenemos que

$$\frac{2ac}{b+c} = \frac{a}{2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}.$$

Operando, se llega a

$$2a^2b - 2a^2c + c^3 - b^2c + c^2b - b^3 = (b-c)(2a^2 - c^2 - bc - bc - b^2)$$

$$= (b-c)(2a^2 - (b+c)^2) = (b-c)(\sqrt{2}a - b - c)(\sqrt{2}a + b + c) = 0.$$

De los tres factores, el último claramente no puede ser cero, lo que deja como opciones posibles

$$b = c \quad \text{o} \quad b + c = \sqrt{2}a.$$

Es decir, o el triángulo es isósceles en A o el lado a viene dado por la media aritmética de b y c multiplicada por el factor $\sqrt{2}$.
Finalmente, observemos que un triángulo del tipo (a, b, b) es acutángulo si y solo si $a < \sqrt{2}b$. Por otra parte, uno del tipo $((b+c)/\sqrt{2}, b, c)$ lo es si y solo si $c/3 < b < c$.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Calcular la siguiente suma:

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{n+2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}.$$

Solución. Denotemos por S la suma buscada. En lugar de S vamos a calcular $2S$, que se escribe como

$$2S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+4}{k(k+1)(k+3)(k+4)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+4)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{18} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+4)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)(n+4)} = \frac{n(n+5)}{4(n+1)(n+4)}.$$

De aquí se concluye inmediatamente que

$$S = \frac{n(n+5)}{8(n+1)(n+4)}.$$

Comentario. Se puede proceder de la manera tradicional considerando la descomposición en fracciones simples. De esta forma,

$$\frac{k+2}{k(k+1)(k+3)(k+4)} = \frac{1/6}{k} - \frac{1/6}{k+1} - \frac{1/6}{k+3} + \frac{1/6}{k+4},$$

y podemos proceder de la misma manera que antes considerando la cancelación *telescópica*.