LV Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
PRIMERA SESIÓN
Ourense, viernes 22 de marzo de 2019

Problema 1

Un conjunto de números enteros T es *orensano* si existen enteros $a < b < c$ tales que a y c pertenecen a T y b no pertenece a T. Hallar el número de subconjuntos T de $\{1,2,...,2019\}$ que son *orensanos.*

Problema 2

Determinar si existe un conjunto finito S formado por números primos positivos de manera que para cada entero $n \geq 2$, el número $2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ sea múltiplo de algún elemento de S.

Problema 3

Los números reales a, b y c, verifican que el polinomio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + c$ tiene exactamente tres raíces reales distintas; estas raíces son iguales a $tany$, $\tan(2y)$ y $\tan(3y)$, para algún número real y.
Hallar todos los posibles valores de y, $0 \leq y < \pi$.

No está permitido el uso de calculadoras,
ni dispositivos electrónicos o digitales de ningún tipo.
Cada problema se puntúa de cero a siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA.

Real Sociedad Matemática Española

LV Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
SEGUNDA SESIÓN
Ourense, sábado 23 de marzo de 2019

Problema 4

Calcular todos los pares de enteros (x, y) tales que $3^4 2^3 (x^2 + y^2) = x^3 y^3$.

Problema 5

Se consideran todos los pares (x, y) de números reales tales que $0 \leq x \leq y \leq 1$. Sea $M(x, y)$ el máximo valor del conjunto

$$A = \{xy,\ 1 - x - y + xy, x + y - 2xy\}.$$

Hallar el mínimo valor que puede tomar $M(x, y)$ para todos estos pares (x, y).

Problema 6

En el triángulo escaleno ABC, la bisectriz del ángulo A corta al lado BC en el punto D. Las rectas que pasan por D y son tangentes a las circunferencias circunscritas de los triángulos ABD y ACD cortan a las rectas AC y AB en los puntos E y F respectivamente. Si BE y CF se cortan en G, demostrar que los ángulos $< EDG$ y $< ADF$ son iguales.

No está permitido el uso de calculadoras,
ni dispositivos electrónicos o digitales de ningún tipo.
Cada problema se puntúa de cero a siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de TRES HORAS Y MEDIA