LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 13 de enero de 2017

1. Sea E una elipse y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 yA_3B_3 están alineados.

2. Sea T un triángulo de ángulos α, β y γ. ¿Para qué valores de α, β y γ el triángulo T se puede dividir en tres triángulos congruentes entre sí?

3. Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} -f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ f(n-1)+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

para $n \geq 0$. Demostrar que $f(n)$ es múltiplo de 3 si, y sólo si, n es múltiplo de 3, y hallar el menor número n que cumple $f(n) = 2017$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 13 de enero de 2017

4. Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación

$$8m - 7 = n^2$$

y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.

5. Se colorean los números $1, 2, \ldots, n$ de dos colores, azul y rojo. Probar que si $n = 2017$ existe una coloración tal que la ecuación

$$8(x + y) = z$$

no tiene soluciones monocromáticas. Determinar el menor n para el que nunca es posible colorear los números de forma tal que no haya soluciones monocromáticas.

6. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 13 de enero de 2017

1. Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación

$$8m - 7 = n^2$$

y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.

2. Se colorean los números $1, 2, \ldots, n$ de dos colores, azul y rojo. Probar que si $n = 2017$ existe una coloración tal que la ecuación

$$8(x + y) = z$$

no tiene soluciones monocromáticas. Determinar el menor n para el que nunca es posible colorear los números de forma tal que no haya soluciones monocromáticas.

3. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 14 de enero de 2017

4. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c-2}=1$$

5. Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.

6. En un triángulo acutángulo ABC consideramos su ortocentro, H. Sean A', B' y C' los simétricos de H con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo igual, entonces también tienen un lado igual. ¿Es cierto el recíproco?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 14 de enero de 2017

1. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c-2}=1$$

2. Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.

3. En un triángulo acutángulo ABC consideramos su ortocentro, H. Sean A', B' y C' los simétricos de H con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo igual, entonces también tienen un lado igual. ¿Es cierto el recíproco?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

<u>Sábado tarde, 14 de enero de 2017</u>

4. Probar que dados $4n$ puntos en el espacio tridimensional, tales que no hay cuatro de ellos coplanarios, siempre se pueden formar n pirámides de base triangular de modo que no hay intersecciones entre ellas.

5. Hallar los valores enteros positivos de m para los que existe una función f del conjunto de los números enteros en sí mismo tal que $f^{(m)}(n) = n + 2017$, donde $f^{(m)}$ consiste en aplicar la función f m veces.

6. Determinar todos los números naturales n para los que existe algún número natural m con las siguientes propiedades

i) El número m tiene al menos dos cifras (en base 10), todas son distintas y ninguna es 0.

ii) El número m es múltiplo de n y cualquier reordenación de sus cifras da lugar a un múltiplo de n.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.