Soluciones

Viernes mañana, primera sesión

1. Con baldosas cuadradas de lado un número exacto de unidades se ha podido embaldosar una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: el primer día se puso una baldosa, el segundo, dos baldosas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas baldosas fueron necesarias?

Solución. Supongamos que fueron necesarias n baldosas y que su tamaño es $k \times k$. Entonces $nk^2 = 18144 = 2^5 \times 3^4 \times 7$. Hay nueve casos posibles para n, a saber, 2×7, $2^3 \times 7$, $2^5 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 7$, $2^5 \times 3^2 \times 7$, $2 \times 3^4 \times 7$, $2^3 \times 3^4 \times 7$, $2^5 \times 3^4 \times 7$. Además este número tiene que poderse expresar en la forma $1+2+3+\cdots+N = N(N+1)/2$ y esto sólo es posible en el caso sexto: $2^5 \times 3^2 \times 7 = 63 \times 64/2 = 2016$. Para descartar los otros casos rápidamente observamos que N y $N+1$ son números primos entre sí. Si por ejemplo $N(N+1)/2 = 2^3 \times 7$, tendría que ser $N+1 = 2^4$ y $N = 7$, que es imposible, etc. Por tanto, se necesitaron 2016 baldosas.

2. Hemos empezado la Olimpiada Matemática puntualmente a las 9:00, como he comprobado en mi reloj, que funcionaba en ese momento correctamente. Cuando he terminado, a las 13:00, he vuelto a mirar el reloj y he visto que las manecillas se habían desprendido de su eje pero manteniendo la posición en la que estaban cuando el reloj funcionaba. Curiosamente las manecillas de las horas y de los minutos aparecían superpuestas exactamente, una sobre otra, formando un ángulo (no nulo) menor que 120° con el segundero. ¿A qué hora se me averió el reloj? (Dar la respuesta en horas, minutos y segundos con un error máximo de un segundo; se supone que, cuando funcionaba, las manecillas del reloj avanzaban de forma continua.)

Solución. Si medimos el tiempo t en segundos a partir de las 00:00 y los ángulos en grados, en sentido horario y a partir de la posición de las manecillas a las 00:00, tenemos que el ángulo barrido por la manecilla de las horas en el instante t es $\alpha_{hor}(t) = t/120$ y barrido por el minutero, $\alpha_{min}(t) = t/10$. Como ambas manecillas han aparecido superpuestas, los dos ángulos han de coincidir en el momento t en que el reloj se ha averiado. El minutero ha podido dar alguna vuelta completa, por tanto debe tenerse

$$\frac{t}{10} = \frac{t}{120} + 360k,$$

con $k \geq 0$ un número entero, es decir, $t = \frac{360\times 120}{11}k$. Como la avería ha sido entre las 9:00 y las 13:00, tiene que ser $9 \leq k \leq 12$. El ángulo para el segundero es $\alpha_{seg}(t) = 6t$, por tanto la diferencia

$$6t - \frac{t}{120} = \frac{360 \times 719}{11}k = (360 \times 65 + \frac{360 \times 4}{11})k$$

debe ser, salvo múltiplos de 360, un número β entre -120 y 120. Si $k = 9$, $\beta = (360 \times 3)/11$, que efectivamente está en este rango. Sin embargo, si $k = 10$ ó 12, $\beta = \pm(360 \times 4)/11$, que está fuera de este intervalo. El caso $k = 11$ también se excluye puesto que se tendría $\beta = 0$ y las tres manecillas no están superpuestas. Por lo tanto el único caso posible es $k = 9$, que corresponde al momento

$$t = \frac{360 \times 120 \times 9}{11} = 3600 \times 9 + 60 \times 49 + 5 + \frac{5}{11},$$

lo que significa que el reloj se averió a las 9:49:05.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en C no isósceles con catetos $b > a$.

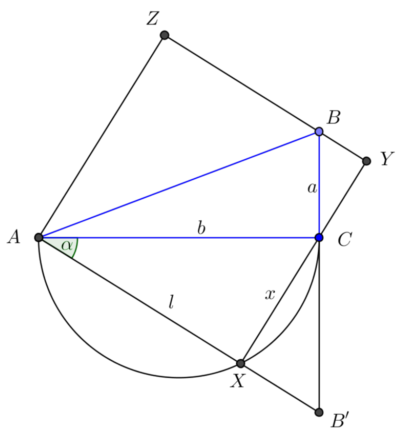
(i) Hallar el lado del cuadrado $AXYZ$ que circunscribe al triángulo ABC (los vértices B y C tienen que estar en lados distintos del cuadrado).

(ii) Explicar paso a paso cómo construir el cuadrado $AXYZ$ con regla y compás.

Solución. (i) Sea l la longitud del cuadrado y x la longitud del segmento XC. Los triángulos rectángulos AXC y BYC son semejantes (puesto que $\angle BCY = \pi/2 - \angle ACX = \angle CAX$), de donde $l/b = (l-x)/a$, es decir, $x/l = (b-a)/b$. Entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$b^2 = l^2 + x^2 = l^2(1 + (\frac{x}{l})^2) = l^2(1 + \frac{(b-a)^2}{b^2}),$$

de donde $l = b^2/\sqrt{(b-a)^2 + b^2}$.



(ii) Para construir el cuadrado observamos que, por (i), se tiene que la tangente del ángulo $\alpha = \angle CAX$ es $x/l = (b-a)/b$. Prolongamos el lado BC del triángulo hasta un punto B' de modo que BB' mida b unidades. Así, CB' mide $b-a$ y el ángulo $\angle CAB'$ tiene tangente $(b-a)/b$. El vértice X del cuadrado que buscamos tiene que estar entonces sobre la recta que contiene a A y B'. Por otro lado, el ángulo $\angle AXC$ tiene que ser de $90°$, así que X tiene que estar sobre la circunferencia con diámetro AC. Por lo tanto, basta con trazar esta circunferencia y su intersección con la recta por A y B' será el punto X buscado. Los puntos Y y Z que completan el cuadrado se obtienen ahora fácilmente.

Viernes tarde, segunda sesión

4. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Hallar B.

Solución. Sean u, v y w las tres raíces y supongamos que $w^2 = u^2 + v^2$. Por las relaciones de Cardano, $u+v+w = 14$, $uv+uw+vw = B$ y $uvw = 84$. Si $s = u+v$ y $p = uv$, se tiene entonces que $s+w = 14$, $pw = 84$ y $s^2 = w^2+2p$. Sustituyendo en esta última ecuación los valores de s y p en función de w y operando, queda $w^2 - 7w + 6 = 0$, luego $w = 1$ ó 6. Si fuera $w = 1$, tendríamos $s = 13$, $p = 84$ y u y v serían raíces de $x^2 - 13x + 84 = 0$, que no tiene soluciones reales. Por tanto, $w = 6$, $s = 8$, $p = 14$ y $B = p + ws = 62$. (Efectivamente, las tres raíces de $x^3 - 14x^2 + 62x - 84$ son 6, $4+\sqrt{2}$ y $4-\sqrt{2}$ y $6^2 = (4+\sqrt{2})^2 + (4-\sqrt{2})^2$.)

5. En un triángulo ABC la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C son concurrentes y además la bisectriz por A y la mediana por B son perpendiculares. Si el lado AB mide una unidad, hallar cuánto miden los otros dos lados.

Solución. Damos dos soluciones diferentes.

Solución 1. Sean P, M y Q los pies de la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C, respectivamente, que se cortan en el punto X. En el triángulo ABM la bisectriz por A, AX, es perpendicular a BM (puesto que por hipótesis la mediana y la bisectriz de ABC son perpendiculares), por tanto $\angle ABX = \angle AMX$, esto es ABM es isósceles y $AM = AB = 1$, con lo cual $AC = 2$.

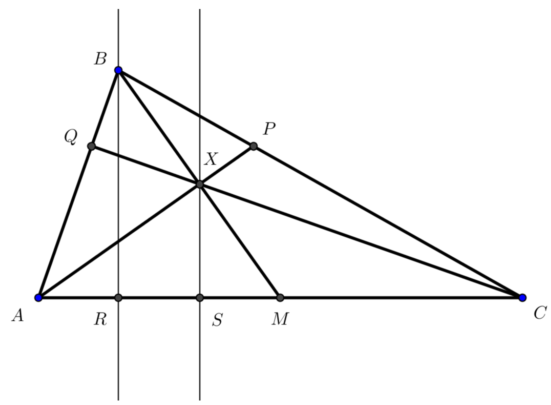
Sea $BP = x$ y $BQ = y$. Por el Teorema de la bisectriz, $BP/AB = PC/AC$, esto es $PC = 2x$. Ahora, por el Teorema de Ceva,

$$1 = \frac{MC}{CP} \cdot \frac{PB}{BQ} \cdot \frac{QA}{AM} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{1-y}{1},$$

de donde $y = 1/3$. Trazamos las perpendiculares a AC por B y X, respectivamente con pies R y S. Los triángulos XQB y XSM son congruentes (son rectángulos, $XB = XM$ por ser AX la altura del triángulo isósceles ABM y $XQ = XS$ por ser perpendiculares a los lados AB y AC desde un punto de la bisectriz), por tanto $SM = BQ = y = 1/3$. Por otro lado, por el Teorema de Thales, $BX = XM$ implica $RS = SM$, luego $RS = 1/3$ y $AR = AM - RS - SM = 1/3$. Finalmente, por el Teorema de Pitágoras,

$$BC^2 = BR^2 + RC^2 = AB^2 - AR^2 + RC^2 = 1 - \frac{1}{9} + (2 - \frac{1}{3})^2 = \frac{11}{3}.$$

Así pues, los otros dos lados miden 2 y $\frac{\sqrt{33}}{3}$.



Solución 2. Igual que antes, $AC = 2$. Fijamos un sistema de coordenadas con origen en A de forma que $\vec{AC} = (2, 0)$. Sea $\vec{AB} = (x, y)$. Entonces

$$\vec{CX} = \vec{CA} + \vec{AX} = (-2, 0) + (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}) = (\frac{x-3}{2}, \frac{y}{2})$$

(notar que X es el punto medio de BM). Pero los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CX}$ son ortogonales, luego $x(x-3) + y^2 = 0$. Como $x^2 + y^2 = 1$, $x = 1/3$ e $y = \sqrt{8}/3$. Por el Teorema de Pitágoras, $BC^2 = y^2 + (2-x)^2 = 11/3$, esto es $BC = \sqrt{33}/3$.

6. ¿De cuántas formas se pueden colorear los vértices de un polígono con $n \geq 3$ lados usando tres colores de forma que haya exactamente m lados, $2 \leq m \leq n$, con los extremos de colores diferentes?

Solución. En el polígono señalamos los puntos medios de los m lados cuyos extremos deben colorearse con colores diferentes. Esto puede hacerse de $\binom{n}{m}$ formas. Los n vértices del polígono quedan divididos así en m grupos de vértices consecutivos en los que todos ellos tienen el mismo color pero los vértices de grupos adyacentes tienen colores diferentes. Hay entonces tantas formas de colorear estos grupos como formas de colorear un polígono de m lados sin que haya ningún lado con los extremos del mismo color (que es en realidad el caso particular $m = n$ del problema; esta interpretación también es válida si $m = 2$ considerando el "polígono" con 2 vértices unidos por un doble lado). La solución será entonces $\binom{n}{m}C_m$, donde C_m es este número.

Obtendremos C_m encontrando una relación de recurrencia para estos números. Obviamente, $C_2 = C_3 = 6$. Supongamos entonces $m \geq 4$ y fijemos tres vértices consecutivos P_1, P_2, P_3. Si P_1 y P_3 van coloreados de forma distinta, simplemente podemos unirlos directamente eliminando P_2 y resultará un polígono con $m-1$ lados a colorear de la forma indicada. Recíprocamente, cada uno de estos polígonos coloreados dará origen a uno con m lados (el color de P_2 quedará determinado por los de P_1 y P_3), por tanto contribuyen a C_m con C_{m-1} posibilidades. Por otro lado, si P_1 y P_3 tienen el mismo color, los podemos pegar eliminando P_2, resultando un polígono con $m-2$ lados que tendremos que colorear. Cada una de estas coloraciones dará origen ahora a 2 coloraciones para el polígono original (pues habrá 2 posibilidades para P_2) y por tanto, la contribución a C_m de este caso es $2C_{m-2}$. Encontramos así la relación de recurrencia buscada: $C_m = C_{m-1} + 2C_{m-2}$.

De la relación anterior obtenemos fácilmente los primeros valores de C_m, $m \geq 2$: 6, 6, 18, 30, 66, 126,... Si comparamos esta sucesión con la de las potencias de 2: 4, 8, 16, 32, 64, 128,..., parece obvio que $C_m = 2^m+(-1)^m 2$, fórmula que se puede confirmar fácilmente por inducción. En efecto, la fórmula es correcta para C_2 y C_3 y, si $m \geq 4$,

$$C_m = C_{m-1}+2C_{m-2} = 2^{m-1}+(-1)^{m-1}2+2(2^{m-2}+(-1)^{m-2}2) = 2^m+(-1)^m 2.$$

Por tanto la solución es $\binom{n}{m}(2^m + (-1)^m 2)$.

Viernes tarde, primera sesión

1. En la primera fila de un tablero 5×5 se colocan 5 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar una misma casilla. ¿Se puede conseguir mediante una secuencia de movimientos que las 5 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?

Solución. Si pintamos las casillas del tablero alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, sucede que una ficha cuyo color visible coincida con el de la casilla, al moverse seguirá teniendo el mismo color que la nueva casilla (puesto que tanto el color de la ficha como el de la casilla cambian). Supuesto que la casilla superior izquierda la hemos dejado blanca, en el inicio hay 3 fichas cuyo color (blanco) coincide con el de la casilla. En todo momento deberá suceder que el color de tres fichas es el mismo que el de la casilla que ocupen (y el de las otras dos, diferente). Sin embargo, colocando las fichas con la cara negra en la última fila, resulta que sólo dos fichas tendrán el color (negro) de su casilla. Por lo tanto, no es posible colocar las fichas de esta manera.

2. Cada 20 minutos durante una semana se travasa una cantidad exacta de litros de agua (siempre la misma cantidad) desde un tanque con 25000 litros a otro depósito inicialmente vacío. Desde este segundo depósito, a intervalos regulares de tiempo, se extrae primero 1 litro, luego 2, luego 3, etc. Justo al final de la semana coinciden el último travase y la última extracción, quedando en ese momento vacío el segundo depósito. Determinar cuánta agua se ha extraído en total durante la semana, en caso de que los datos del problema lo permitan. (Se supone que los trasvases y las extracciones se realizan instantáneamente. El primer trasvase se hace pasados los primeros 20 minutos y la primera extracción, pasado el primer intervalo de tiempo.)

Solución. Sea n el número de extracciones de agua realizadas durante la semana. En total habrán extraído $T_n = 1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ litros. Por otro lado si el caudal que se trasvasa cada 20 minutos al segundo depósito es de k litros, el total de litros que ha entrado es $7\times 24\times 3\times k = 2^3\times 3^2\times 7\times k$, así que $2^3\times 3^2\times 7\times k = n(n+1)/2$ y esta cantidad tiene que ser ≤ 25000, por tanto $2^4\times 3^2\times 7\times k = n(n+1)\leq 50000$. Por la última desigualdad, $n\leq 223$. Ahora, los números n y $n+1$ son primos entre sí luego cada potencia 2^4, 3^2, 7 divide a n o a $n+1$. Ciertamente $2^4\times 3^2\times 7 = 1008$ no puede dividir a n ni a $n+1$, dado que $n\leq 223$. Supongamos que $n = 16c$ es múltiplo de 16. Entonces $n+1$ es múltiplo de 9 ó 7. En el primer caso se tendría $n+1 = 16c+1\equiv 0 \pmod 9$, es decir, $c\equiv 5 \pmod 9$. Pero si $c = 5$, $n = 80$ y 7 no divide a 80×81 y, si $c\geq 5+9 = 14$, $n\geq 16\times 14 = 224$. Por otro lado, en el segundo caso, $n+1 = 16c+1\equiv 0 \pmod 7$, de donde $c\equiv 3 \pmod 7$. Pero 9 no divide al producto $n(n+1)$ si $c = 3$ ó 10, y si $c\geq 17$, $n > 223$. Concluimos que n no es múltiplo de 16 y $n+1$ sí. Si n es múltiplo de 9 y $n+1$ de 16×7, tendríamos $n = 16\times 7\times c-1\equiv 0 \pmod 9$, es decir, $c\equiv 7 \pmod 9$ y entonces $c\geq 7$ y $n > 223$. Similarmente, si n es múltiplo de 7 y $n+1$ de 16×9, $n = 16\times 9\times c-1\equiv 0 \pmod 7$, es decir, $c\equiv 2 \pmod 7$ y entonces $c\geq 2$ y $n > 223$. El único caso que queda es que n sea múltiplo de $9\times 7 = 63$ y $n+1$ de 16. Entonces $n+1 = 63c+1\equiv 0 \pmod{16}$ y $c\equiv 1 \pmod{16}$ y necesariamente $c = 1$ (si no $n > 223$). Por lo tanto sólo hay una solución posible, a saber, $n = 63$, lo que da un volumen total extraído de $T_{63} = 63\times 64/2 = 2016$ litros.

3. Sea $n\geq 1$ y $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que cumple que los números $P(1), P(2),\ldots, P(n)$ son $1, 2,\ldots, n$ (no necesariamente en este orden). Demostrar que uno de los números $P(0)$ o $P(n+1)$ es múltiplo de $n!$.

Solución. Si i y j son dos números enteros, se tiene que $i^k - j^k = (i-j)(i^{k-1}+i^{k-2}j+\cdots+ij^{k-2}+j^{k-1})$ es múltiplo de $i-j$. Entonces, si $P(x) = a_m x^m+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$,

$$P(i)-P(j) = a_m(i^m-j^m)+\cdots+a_2(i^2-j^2)+a_1(i-j)$$

también es múltiplo de $i-j$. En particular, $n-1$ divide a $P(n)-P(1)$. Como $P(1)$ y $P(n)$ son enteros distintos entre 1 y n tiene que ser $P(1) = 1$ y $P(n) = n$ o al revés, $P(1) = n$ y $P(n) = 1$. En el primer caso, $n-2 = (n-1)-1$ divide a $P(n-1)-P(1) = P(n-1)-1$ y $2\leq P(n-1)\leq n-1$, luego tiene que ser $P(n-1) = n-1$ y, similarmente $P(n-2) = n-2$, etc.

De forma parecida se ve que en el segundo caso $P(n-1) = 2$, $P(n-2) = 3$, etc.

Si $P(i) = i$ para todo $1 \leq i \leq n$, todos estos números son raíces de $P(x) - x$, luego

$$P(x) = c(x)(x-1)(x-2)\dots(x-n) + x$$

para algún polinomio con coeficientes enteros $c(x)$. Por otro lado, si $P(i) = n - i + 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, se tiene que todos los enteros $1 \leq i \leq n$ son raíces de $P(x) - n + x - 1$, luego

$$P(x) = c(x)(x-1)(x-2)\dots(x-n) + n - x + 1$$

para algún polinomio con coeficientes enteros $c(x)$. En el primer caso $P(0) = (-1)^n c(0) n!$ y, en el segundo, $P(n+1) = c(n+1)n!$, luego efectivamente $n!$ divide a $P(0)$ o a $P(n+1)$.

Sábado mañana, segunda sesión

4, 1. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

Solución. Sea a_n la cuota total del socio n-ésimo y sea $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. El n-ésimo ($n \geq 2$) socio tiene que pagar en total $(a_1+1) + (a_2+1) + \cdots + (a_{n-1}+1) = s_{n-1} + n - 1$ euros, luego $a_n = s_{n-1} + n - 1$ y

$$s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + s_{n-1} + (n-1) = 2s_{n-1} + n - 1.$$

Iterando esta relación queda $s_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} \times 1 + 2^{n-3} \times 2 + \cdots + 2 \times (n-2) + (n-1)$, de donde $s_n = 2s_n - s_n = 2^n + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 - n + 1 = 2^n + 2^{n-1} - 1 - n$ y entonces, para $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 2^n - 2^{n-2} - 1 = 3 \times 2^{n-2} - 1.$$

5, 2. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

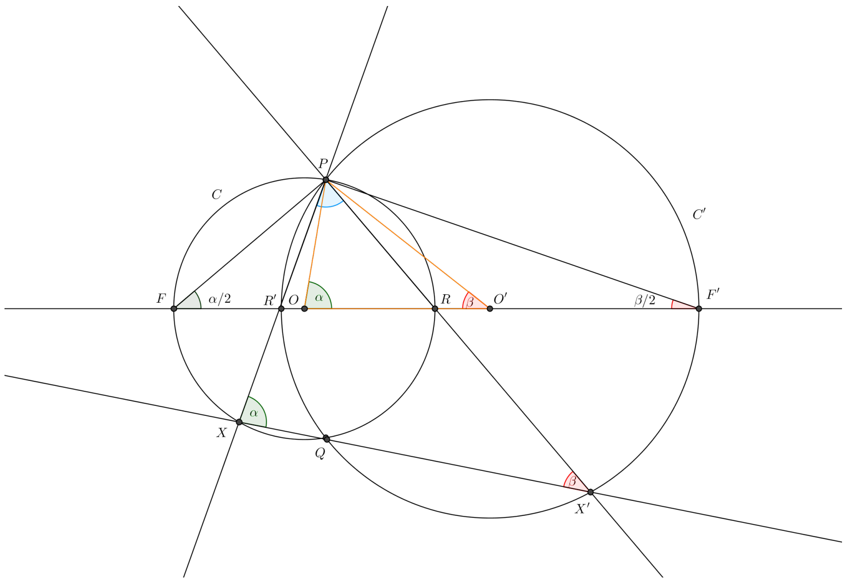
(i) hallar el ángulo $\angle XPX'$.

(ii) demostrar que $(d + r - r')(d - r + r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

Solución. (i) Sean F y F' los puntos diametralmente opuestos a R y R' en C y C', respectivamente. Por el Teorema del ángulo inscrito se tiene que $\angle PFQ = \angle PXQ = \alpha$ que, por simetría, es el doble de $\angle PFR$, luego $\angle PFR = \alpha/2$. Como el triángulo PFR es rectángulo en P (al ser FR diámetro de C), deducimos que $\angle PRF = \pi/2 - \alpha/2$. Similarmente, $\angle PR'F' = \pi/2 - \beta/2$, donde $\beta = \angle PX'Q$. Por otro lado, considerando el triángulo XPX', $\angle XPX' = \pi - \alpha - \beta$, luego sumando los ángulos del triángulo PRR',

$$(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) + (\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) + (\pi - \alpha - \beta) = \pi,$$

es decir $\alpha + \beta = 2\pi/3$ y $\angle XPX' = \pi/3$.



(ii) Consideramos el triángulo OPO', donde O y O' son los centros de C y C', respectivamente. Nuevamente, por el Teorema del ángulo inscrito, el ángulo central $\angle POR$ es $2\angle PFR = \alpha$ y similarmente $\angle PO'R' = 2\angle PF'R' = \beta$, luego $\angle OPO' = \pi/3$. Los lados del triángulo OPO' son los radios r y r' y la distancia d entre los centros, por tanto el resultado se sigue directamente del Teorema del coseno: $d^2 = r^2 + r'^2 - rr'$, que es equivalente a la relación dada en el enunciado.

6, 3. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20.$$

Solución. Podemos reescribir la ecuación en la forma

$$|y_1| + |y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| + |20 - y_3| = 20, \tag{1}$$

donde $y_1 = 5 - x_1 - x_2$, $y_2 = 10 - 2x_2$ y $y_3 = 15 - x_2 + x_3$, por tanto toda solución entera de la ecuación original da una solución entera de (**??**) con y_2 un número par. Recíprocamente, es inmediato comprobar que toda solución de (**??**) con y_2 par, da una solución de la ecuación del enunciado. Observamos que (**??**) se puede escribir como

$$d(0, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) + d(y_3, 20) = d(0, 20),$$

donde $d(x, y) = |x - y|$ es la distancia entre los números reales x e y. Sólo puede darse esta situación si $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq 20$ (podemos imaginar una regla de carpintero con cuatro segmentos de longitudes que suman 20 unidades y que tienen que cubrir desde 0 a 20, que es una distancia de 20 unidades. La única posibilidad es que la regla esté completamente estirada). Se trata entonces de contar las ternas de números enteros $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq 20$ con y_2 par. Si escribimos $y_2 = 2k$ con $0 \leq k \leq 10$, hay $2k+1$ posibilidades para y_1 y $21 - 2k$ para y_3, luego el número de soluciones buscado es

$$\sum_{k=0}^{10}(2k+1)(21-2k) = \sum_{k=0}^{10}(21+40k-4k^2) = 21\times 11+40\times 55-4\times 385 = 891.$$

Por tanto el número de soluciones enteras de la ecuación dada es 891.

S´abado ma˜nana, primera sesi´on

4, 1. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

Solución. Sea a_n la cuota total del socio n-ésimo y sea $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. El n-ésimo ($n \geq 2$) socio tiene que pagar en total $(a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \cdots + (a_{n-1} + 1) = s_{n-1} + n - 1$ euros, luego $a_n = s_{n-1} + n - 1$ y

$$s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + s_{n-1} + (n-1) = 2s_{n-1} + n - 1.$$

Iterando esta relación queda $s_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} \times 1 + 2^{n-3} \times 2 + \cdots + 2 \times (n-2) + (n-1)$, de donde $s_n = 2s_n - s_n = 2^n + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 - n + 1 = 2^n + 2^{n-1} - 1 - n$ y entonces, para $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 2^n - 2^{n-2} - 1 = 3 \times 2^{n-2} - 1.$$

5, 2. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

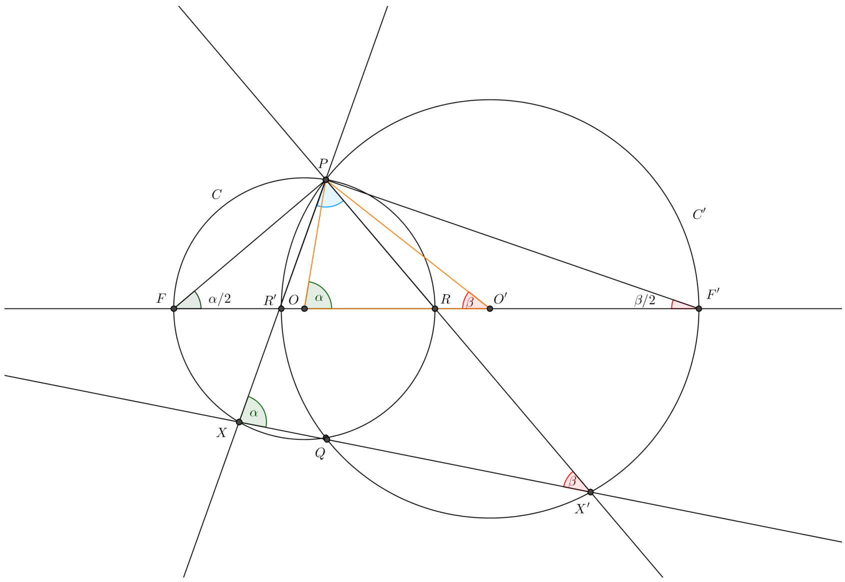
(i) hallar el ángulo $\angle XPX'$.

(ii) demostrar que $(d + r - r')(d - r + r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

Solución. (i) Sean F y F' los puntos diametralmente opuestos a R y R' en C y C', respectivamente. Por el Teorema del ángulo inscrito se tiene que $\angle PFQ = \angle PXQ = \alpha$ que, por simetría, es el doble de $\angle PFR$, luego $\angle PFR = \alpha/2$. Como el triángulo PFR es rectángulo en P (al ser FR diámetro de C), deducimos que $\angle PRF = \pi/2 - \alpha/2$. Similarmente, $\angle PR'F' = \pi/2 - \beta/2$, donde $\beta = \angle PX'Q$. Por otro lado, considerando el triángulo XPX', $\angle XPX' = \pi - \alpha - \beta$, luego sumando los ángulos del triángulo PRR',

$$(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) + (\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) + (\pi - \alpha - \beta) = \pi,$$

es decir $\alpha + \beta = 2\pi/3$ y $\angle XPX' = \pi/3$.



(ii) Consideramos el triángulo OPO', donde O y O' son los centros de C y C', respectivamente. Nuevamente, por el Teorema del ángulo inscrito, el ángulo central $\angle POR$ es $2\angle PFR = \alpha$ y similarmente $\angle PO'R' = 2\angle PF'R' = \beta$, luego $\angle OPO' = \pi/3$. Los lados del triángulo OPO' son los radios r y r' y la distancia d entre los centros, por tanto el resultado se sigue directamente del Teorema del coseno: $d^2 = r^2 + r'^2 - rr'$, que es equivalente a la relación dada en el enunciado.

6, 3. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20.$$

Solución. Podemos reescribir la ecuación en la forma

$$|y_1| + |y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| + |20 - y_3| = 20, \tag{1}$$

donde $y_1 = 5 - x_1 - x_2$, $y_2 = 10 - 2x_2$ y $y_3 = 15 - x_2 + x_3$, por tanto toda solución entera de la ecuación original da una solución entera de (**??**) con y_2 un número par. Recíprocamente, es inmediato comprobar que toda solución de (**??**) con y_2 par, da una solución de la ecuación del enunciado. Observamos que (**??**) se puede escribir como

$$d(0, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) + d(y_3, 20) = d(0, 20),$$

donde $d(x, y) = |x - y|$ es la distancia entre los números reales x e y. Sólo puede darse esta situación si $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq 20$ (podemos imaginar una regla de carpintero con cuatro segmentos de longitudes que suman 20 unidades y que tienen que cubrir desde 0 a 20, que es una distancia de 20 unidades. La única posibilidad es que la regla esté completamente estirada). Se trata entonces de contar las ternas de números enteros $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq 20$ con y_2 par. Si escribimos $y_2 = 2k$ con $0 \leq k \leq 10$, hay $2k+1$ posibilidades para y_1 y $21 - 2k$ para y_3, luego el número de soluciones buscado es

$$\sum_{k=0}^{10}(2k+1)(21-2k) = \sum_{k=0}^{10}(21+40k-4k^2) = 21\times 11+40\times 55-4\times 385 = 891.$$

Por tanto el número de soluciones enteras de la ecuación dada es 891.

Sábado tarde, segunda sesión

4. Encontrar la solución entera más pequeña de la ecuación

$$\lfloor\frac{x}{8}\rfloor - \lfloor\frac{x}{40}\rfloor + \lfloor\frac{x}{240}\rfloor = 210.$$

(Si x es un número real, $\lfloor x\rfloor$ es la parte entera de x, esto es, el mayor número entero menor o igual que x.)

Solución. Sea x una solución entera de la ecuación. Dividiendo, primero por 240, luego el resto r_1 por 40 y el nuevo resto r_2 por 8, resulta

$$x = 240c_1 + r_1 = 240c_1 + 40c_2 + r_2 = 240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3,$$

donde $0 \leq c_2 < 6$, $0 \leq c_3 < 5$ y $0 \leq r_3 < 8$ (las desigualdades para c_2 y c_3 se obtienen de $0 \leq r_1 < 240$ y $0 \leq r_2 < 40$). Entonces

$$210 = \lfloor \frac{x}{8} \rfloor - \lfloor \frac{x}{40} \rfloor + \lfloor \frac{x}{240} \rfloor = (30c_1+5c_2+c_3)-(6c_1+c_2)+c_1 = 25c_1+4c_2+c_3,$$

y el único caso posible es $c_1 = 8$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$ (reduciendo módulo 5 queda $c_2 \equiv c_3 \pmod 5$ y necesariamente $c_2 = c_3$; entonces $42 = 5c_1 + c_2$ y tiene que ser $c_2 = 2$, $c_1 = 8$), con lo que

$$x = 240 \times 8 + 40 \times 2 + 8 \times 2 + r_3 = 2016 + r_3$$

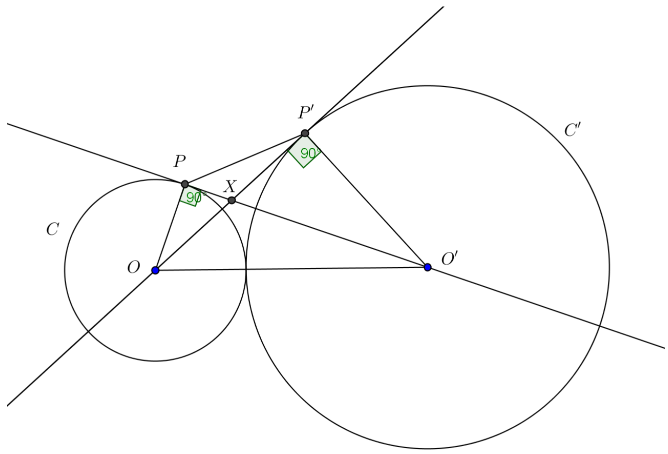
y la menor solución entera de la ecuación dada es $x = 2016$ (las otras son $2017, \ldots, 2023$).

5. Sean C y C' dos circunferencias tangentes exteriores con centros O y O' y radios 1 y 2, respectivamente. Desde O se traza una tangente a C' con punto de tangencia en P' y desde O' se traza la tangente a C con punto de tangencia en P en el mismo semiplano que P' respecto de la recta que pasa por O y O'. Hallar el área del triángulo OXO', donde X es el punto de corte de $O'P$ y OP'.

Solución. Los triángulos OPO' y $OP'O'$ son rectángulos en P y P', respectivamente y $\angle PXO = \angle P'XO'$, luego los triángulos PXO y $P'XO'$ son semejantes con razón de semejanza $O'P'/OP = 2$. La razón entre sus áreas S' y S es entonces $S'/S = 4$. Por el Teorema de Pitágoras $OP' = \sqrt{5}$ y $O'P = 2\sqrt{2}$, luego si A es el área pedida se tiene que

$$A + S' = \frac{1}{2} O'P' \cdot OP' = \sqrt{5}; \quad A + S = \frac{1}{2} OP \cdot O'P = \sqrt{2}.$$

De las relaciones anteriores se obtiene fácilmente que $A = \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3}$.



6. Si n es un número natural, el n-ésimo número triangular es $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Hallar todos los valores de n para los que el producto de los 16 números triangulares consecutivos $T_n T_{n+1} \cdots T_{n+15}$ es un cuadrado perfecto.

Solución. Como $T_n = n(n+1)/2$, el producto de los 16 números triangulares es $P_n = nC_n(n+16)/2^{16}$, donde $C_n = (n+1)^2 \dots (n+15)^2$ es un cuadrado perfecto. Entonces P_n es un cuadrado perfecto si y sólo si lo es $n(n+16)$. Como n y $n+16$ no tienen divisores impares comunes, para que $n(n+16)$ sea un cuadrado perfecto los primos impares que dividen a n y a $n+16$ deben aparecer elevados a un exponente par, de modo que podemos escribir $n = 2^a m^2$ y $n + 16 = 2^b t^2$ con $a, b = 0$ ó 1. Más aun, n y $n+16$ tienen la misma paridad, por tanto $a = b = 0$ ó $a = b = 1$. En el primer caso $t^2 = m^2 + 16$ y sólo puede ser $m = 3$, $t = 5$ (con $m \geq 7$ no puede haber soluciones porque la diferencia de dos cuadrados distintos ≥ 49 es mayor que 16 y, con $m \leq 6$, sólo hay la solución indicada), por lo que $n = 9$ y $n(n+16) = 9 \times 25$, que es un cuadrado. En el caso $a = b = 1$, resulta $t^2 = m^2 + 8$, cuya única solución es $m = 1$, $t = 3$, que corresponde a $n = 2$, valor para el que $n(n+16) = 36$ es un cuadrado. La respuesta es por tanto $n = 2$ y 9.