LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 15 de enero de 2016

1. Con baldosas cuadradas de lado un número exacto de unidades se ha podido embaldosar una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: el primer día se puso una baldosa, el segundo dos baldosas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas baldosas fueron necesarias?

2. Hemos empezado la Olimpiada Matemática puntualmente a las 9:00, como he comprobado en mi reloj, que funcionaba en ese momento correctamente. Cuando he terminado, a las 13:00, he vuelto a mirar el reloj y he visto que las manecillas se habían desprendido de su eje pero manteniendo la posición en la que estaban cuando el reloj funcionaba. Curiosamente las manecillas de las horas y de los minutos aparecían superpuestas exactamente, una sobre otra, formando un ángulo (no nulo) menor que 120° con el segundero. ¿A qué hora se me averió el reloj? (Dar la respuesta en horas, minutos y segundos con un error máximo de un segundo; se supone que, cuando funcionaba, las manecillas del reloj avanzaban de forma continua.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en C no isósceles con catetos $b > a$.

i) Hallar el lado del cuadrado $AXYZ$ que circunscribe al triángulo ABC (los vértices B y C tienen que estar en lados distintos del cuadrado).

ii) Explicar paso a paso cómo construir el cuadrado $AXYZ$ con regla y compás.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 15 de enero de 2016

4. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Hallar B.

5. En un triángulo ABC la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C son concurrentes y además la bisectriz por A y la mediana por B son perpendiculares. Si el lado AB mide una unidad, hallar cuánto miden los otros dos lados.

6. De cuántas formas se pueden colorear los vértices de un polígono con $n \geq 3$ lados usando tres colores de forma que haya exactamente m lados, $2 \leq m \leq n$, con los extremos de colores diferentes?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 15 de enero de 2016

1. En la primera fila de un tablero 5×5 se colocan 5 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar una misma casilla. ¿Se puede conseguir mediante una secuencia de movimientos que las 5 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?

2. Cada 20 minutos durante una semana se travasa una cantidad exacta de litros de agua (siempre la misma cantidad) desde un tanque con 25000 litros a otro depósito inicialmente vacío. Desde este segundo depósito, a intervalos regulares de tiempo, se extrae primero 1 litro, luego 2, luego 3, etc. Justo al final de la semana coinciden el último travase y la última extracción, quedando en ese momento vacío el segundo depósito. Determinar cuánta agua se ha extraído en total durante la semana, en caso de que los datos del problema lo permitan. (Se supone que los trasvases y las extracciones se realizan instantáneamente. El primer trasvase se hace pasados los primeros 20 minutos y la primera extracción, pasado el primer intervalo de tiempo.)

3. Sea $n \geq 1$ y $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que cumple que los números $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ son $1, 2, \ldots, n$ (no necesariamente en este orden). Demostrar que uno de los números $P(0)$ o $P(n+1)$ es múltiplo de $n!$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

<u>Sábado mañana, 16 de enero de 2016</u>

4. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

5. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

i) Hallar el ángulo $\angle XPX'$.

ii) Demostrar que $(d+r-r')(d-r+r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

6. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5-x_1-x_2| + |5+x_1-x_2| + |5+x_2+x_3| + |5+x_2-x_3| = 20$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

<u>Sábado mañana, 16 de enero de 2016</u>

1. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

2. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

i) Hallar el ángulo $\angle XPX'$.

ii) Demostrar que $(d+r-r')(d-r+r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

3. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 16 de enero de 2016

4. Encontrar la solución entera más pequeña de la ecuación

$$\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{40} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{240} \right\rfloor = 210$$

(Si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x, esto es, el mayor número entero menor o igual que x.)

5. Sean C y C' dos circunferencias tangentes exteriores con centros O y O' y radios 1 y 2, respectivamente. Desde O se traza una tangente a C' con punto de tangencia en P' y desde O' se traza la tangente a C con punto de tangencia en P en el mismo semiplano que P' respecto de la recta que pasa por O y O'. Hallar el área del triángulo OXO', donde X es el punto de corte de $O'P$ y OP'.

6. Si n es un número natural, el n-ésimo número triangular es $T_n = 1+2+\cdots+n$. Hallar todos los valores de n para los que el producto de los 16 números triangulares consecutivos $T_n T_{n+1} \cdots T_{n+15}$ es un cuadrado perfecto.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.