LI Olimpiada matemática Española (Concurso Final)

Enunciados y Soluciones

1. *Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas.*

Solución. Sea el polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ y sean $A(c, f(c))$ y $B(d, f(d))$ dos puntos con coordenadas enteras. Entonces

$$f(c) - f(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i(c^i - d^i)$$

Todos los sumandos de esta suma son divisibles por $c - d$, así que

$$f(c) - f(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i(c^i - d^i) = k(c - d),$$

donde k es un entero. Como la distancia entre los puntos A y B, que denotamos por $d(A, B)$ es un entero, entonces $d^2(A, B)$ es un cuadrado perfecto. Pero

$$d^2(A, B) = (c - d)^2 + k^2(c - d)^2 = (c - d)^2(1 + k^2)$$

luego la única posibilidad para que esta expresión sea un cuadrado perfecto es que $k = 0$, en cuyo caso

$$f(c) - f(d) = 0$$

y efectivamente el segmento AB es paralelo al eje de abcisas.

2. *En el triángulo ABC, sea A' el punto simétrico de A respecto del circuncentro O de ABC.*

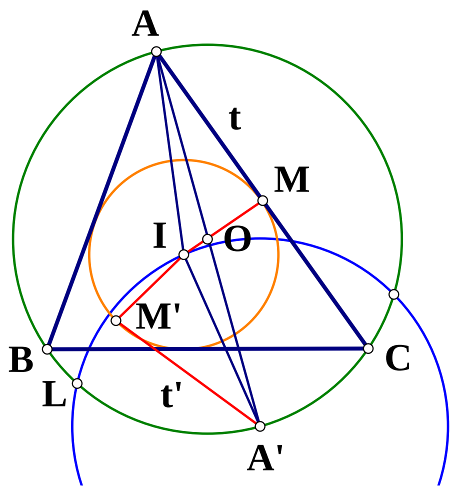
a) *Probar que la suma de los cuadrados de los segmentos de tangentes trazadas desde A y A' a la circunferencia inscrita en ABC es igual a $4R^2 - 4Rr - 2r^2$.*

b) *Sea I el incentro del $\triangle ABC$. Probar que la circunferencia de centro A' y radio $A'I$ corta a la circunferencia circunscrita de ABC en un punto L tal que $AL = \sqrt{AB.AC}$.*

Solución. a) Si t y t' son las longitudes de los segmentos de tangentes, se tiene

$$t^2 = AI^2 - r^2 \quad \text{y} \quad t'^2 = A'I^2 - r^2;$$

por lo tanto,



$$t^2 + t'^2 = AI^2 + A'I^2 - 2r^2$$

Aplicando el teorema de Apolonio al triángulo AIA' con la mediana IO resulta

$$AI^2 + A'I^2 = 2IO^2 + 2R^2 = 2(R^2 - 2Rr) + 2R^2 = 4R^2 - 4Rr$$

Sustituyendo en la expresión anterior resulta la relación pedida.

b) Teniendo en cuenta a) y que $AL^2 = A'A^2 - A'L^2 = 4R^2 - A'I^2$, ya que el triángulo $AA'L$ es claramente rectángulo por ser AA' un diámetro, resulta

$$AL^2 = 4R^2 - (4R^2 - 4Rr - AI^2) = 4Rr + AI^2 = \frac{abc}{p} + \frac{bc(p-a)}{p} = bc,$$

donde las dos últimas expresiones se obtienen a partir de las relaciones entre ángulos y lados en el triángulo, teniendo en cuenta que $t = p - a$ siendo p el semiperímetro.

3. *En la pizarra está escrito un número entero. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, empezando por A. Cada jugador en su turno reemplaza el número existente por el que resulte de realizar una de estas dos operaciones: restar* 1 *o dividir entre* 2*, siempre que se obtenga un entero positivo. El jugador que llegue al número* 1 *gana. Determinar razonadamente el menor número par que le exige a A jugar al menos* 2015 *veces para ganar (no se contabilizan los turnos de B).*

Solución. Si el valor de N inicial es par, veamos que gana A: ya sea restando 1 o bien dividiendo entre 2 (en el caso $N = 4k + 2$, $\frac{N}{2} = 2k + 1$ impar), A siempre le dejará a B un impar, obligándolo a restar 1 por no poder dividir entre 2, con lo cual al jugar A volverá a encontrarse con un par, menor que el anterior. Así, A se encontrará finalmente con un 2, y ganará.
Hay que destacar que cuando A tiene dos opciones válidas para dejarle a B un impar, siempre preferirá dividir entre 2, para acercarse más rápidamente al objetivo.

A continuación usaremos el siguiente resultado:

Sea y un número par con el cual se encuentra A en su turno. Entonces, dos turnos antes A se encontraba con un número mayor o igual que $2y + 4$.

En efecto, distinguiremos dos casos: (1) Caso $y = 4k + 2$. Proviene de una jugada obligada de B desde $4k + 3$. Antes, A podía estar en $8k + 6$, o bien $4k + 4$ (esto es viable, ya que desde $4k + 4$ A no puede dividir porque $2k + 2$ es par). Es decir, B estaba antes en $8k + 7$ o en $4k + 5$. Si B estaba en $8k + 7$, A pudo estar antes en $16k + 14$ o en $8k + 8$, mientras que si B estaba en $4k + 5$ A sólo pudo estar en $8k + 10$, no en $4k + 6$, porque en ese caso habría preferido dividir en vez de restar. Resumiendo, si $y = 4k+2$, hace dos turnos A podía encontrarse en $16k+14, 8k+10$ o $8k + 8$, siendo la menor opción justamente $2y + 4$.

(2) Caso $y = 4k$. Razonando de forma similar, se deduce que hace dos turnos A se encontraba en $8k + 4$ $(2y + 4)$ o

La solución al problema se obtendrá aplicando repetidamente el resultado anterior.

Definimos la sucesión $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 4$, cuya fórmula explícita es

$$a_n = 6 \cdot 2^n - 4$$

Aplicando reiteradamente el resultado, vemos que para todo n se tiene que cualquier N desde el cual se llegue al 2 en $2n$ turnos, debe cumplir $N \geq a_n$. Es decir, contando con que A pasa del 2 al 1 en un turno, hemos probado que para todo n, los números N que le exigen a A al menos $2n + 1$ jugadas cumplen $N \geq a_n$.
Dado que para $n = 1007$ se tiene $2n + 1 = 2015$, se cumple que N es mayor o igual que el término a_{1007} de la sucesión considerada, es decir, el número $6 \cdot 2^{1007} - 4$.
Queda por probar que se alcanza la igualdad. Para ello, basta ver que para todo $n \geq 1$, si A se encuentra con a_n, tras dos turnos estará en a_{n-1}. En efecto,

$$\underbrace{6 \cdot 2^n - 4}_{a_n} \xrightarrow{A} 6 \cdot 2^n - 5 \xrightarrow{B} 6 \cdot 2^n - 6 \xrightarrow{A} 3 \cdot 2^n - 3 \xrightarrow{B} 3 \cdot 2^n - 4 = \underbrace{6 \cdot 2^{n-1} - 4}_{a_{n-1}}$$

4. *Todas las caras de un poliedro son triángulos. A cada uno de los vértices de este poliedro se le asigna de forma independiente uno de entre tres colores: verde, blanco* *o negro. Decimos que una cara es* **extremeña** *si sus tres vértices son de distintos colores, uno verde, uno blanco y uno negro. Es cierto que, independientemente de cómo coloreemos los vértices, el número de caras extremeñas de este poliedro es siempre par?*

Solución. Sea C el número de caras del poliedro. Cada cara tiene 3 lados, cada uno de los cuáles pertenece exactamente a dos caras. Luego el número total de aristas del poliedro es $3C/2$, que ha de ser entero. Luego el número C de caras del poliedro es par.
A una arista cuyos vértices extremos son del mismo color la llamaremos *monocroma*. Si sumamos las aristas monocromas de todas las caras, como cada una de ellas está exactamente en dos caras, tendremos un número par. A este número no contribuyen las caras extremeñas, pues no contienen aristas monocromas, y las no extremeñas lo hacen con un número impar: 3, si los tres vértices son del mismo color, o 1 en otro caso. Por tanto, el número de caras no extremeñas tiene que ser par. Como el número total de caras es par, también será par el número de caras extremeñas.

5. *Sean p y n enteros positivos, tales que p es primo, $n \geq p$, y $1+np$ es un cuadrado perfecto. Probar que $n+1$ es suma de p cuadrados perfectos no nulos.*

Solución. Sea $1 + np = k^2$, con k entero positivo. Entonces $np = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$. Ahora consideramos dos casos:

1. Si el primo p divide a $k-1$, entonces $k-1 = p\ell$ y $k = p\ell + 1$, con ℓ entero positivo. Por tanto

   $$1 + np = k^2 = (p\ell + 1)^2 = p^2\ell^2 + 2p\ell + 1 \Leftrightarrow np = p^2\ell^2 + 2p\ell \Leftrightarrow n = p\ell^2 + 2\ell$$

   Entonces, $n + 1 = p\ell^2 + 2\ell + 1 = (p-1)\ell^2 + (\ell+1)^2$ como queríamos probar.

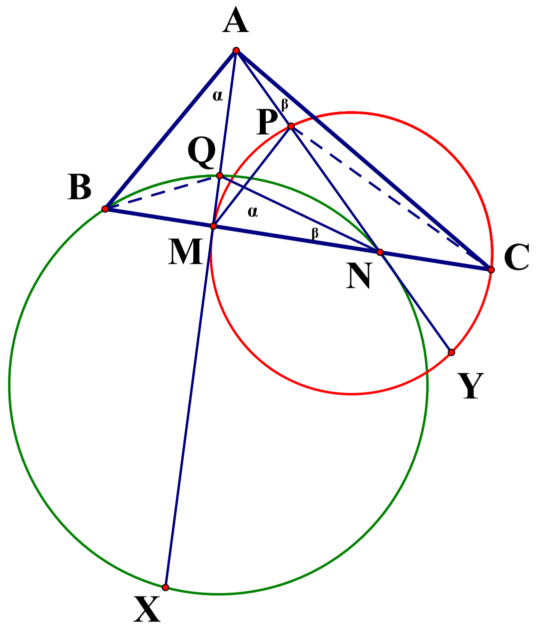
2. Si el primo p divide a $k+1$, entonces $k+1 = p\ell$ y $k = p\ell - 1$, con $\ell > 1$ entero ($\ell = 1$ se corresponde con el caso $n = p - 2$, que no es posible). Por tanto

   $$1 + np = k^2 = (p\ell - 1)^2 = p^2\ell^2 - 2p\ell + 1 \Leftrightarrow np = p^2\ell^2 - 2p\ell \Leftrightarrow n = p\ell^2 - 2\ell$$

   Entonces, $n + 1 = p\ell^2 - 2\ell + 1 = (p-1)\ell^2 + (\ell-1)^2$ es suma de p cuadrados perfectos.

6. *Sean M y N puntos del lado BC del triángulo ABC tales que $BM = CN$, estando M en el interior del segmento BN. Sean P, Q puntos que están respectivamente en los segmentos AN, AM tales que $\angle PMC = \angle MAB$ y $\angle QNB = \angle NAC$. ¿Es cierto que $\angle QBC = \angle PCB$?*

Solución. La idea clave de la solución es considerar las circunferencias circunscritas de los triángulos BNQ (en verde en la figura) y PMC (en rojo). Si AM corta a la circunferencia (BNQ) en X, y AN corta a la circunferencia (PMC) en Y, es evidente que los cuadriláteros $BQNX$ y $MPCY$ son cílicos. Puesto que $\angle QBC =$



$\angle QBN$ y $\angle PCB = \angle PCM$, los ángulos del enunciado del problema serán iguales si lo son $\angle QBC$ y $\angle PCM$. Pero $\angle QBN = \angle QXN = \angle MXN$ y por otra parte $\angle PCM = \angle PYM = \angle NYM$. Entonces el problema estará resuelto en sentido afirmativo si demostramos que $\angle MXN = \angle NYM$ lo cual es tanto como decir que los cuatro puntos M, N, Y, X están en una circunferencia, para lo cual podemos intentar demostrar que

$$AM \cdot AX = AN \cdot AY \Leftrightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AY}{AX}$$

Para ello razonaremos de la siguiente manera:

Los triángulos ABM y ACN tienen la misma área, ya que sus bases son iguales por hipótesis y la altura desde A es la misma; entonces

$$AM \cdot AB \cdot \sin\alpha = AN \cdot AC \cdot \sin\beta, \tag{1}$$

donde $\alpha = \angle MAB$ y $\beta = \angle NAC$. Por otra parte, dos de los ángulos del triángulo ABX son α y $\angle BXQ = \angle QNB = \beta$ (en la circunferencia (BNQ)).

Análogamente, dos de los ángulos del triángulo ACY son β y α. Por lo tanto esos dos triángulos son semejantes, y escribiendo la proporcionalidad entre lados homólogos, se tiene

$$\frac{AY}{AX} = \frac{CY}{AB} \tag{2}$$

Por último, aplicando el teorema del seno en el triángulo ACY, tenemos

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{CY}{\sin\beta} \Leftrightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{CY}{AC}$$

Utilizando (1) y teniendo en cuenta (2), resulta

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AC \cdot \sin\beta}{AB \cdot \sin\alpha} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{CY}{AC} = \frac{AY}{AX}$$

y esto demuestra la igualdad de ángulos indicada en el enunciado